GENELLEŞTİRİLMİŞ BULANIK KÜMELER

Mehmet Şahin
Gaziantep Üniversitesi, Matematik Bölümü, 27310, Gaziantep

Özet: Bu çalışmada öncelikle $\mathcal{P}(X)$ i bir alt aile olarak bulunduran bulanık kümelerin $\mathcal{GF}(X)$ ailesi bir halka olarak yapılandırılmakta ve bu yapının elemanları genelleştirilmiş bulanık kümeler olarak adlandırılmaktadır.Buna ek olarak L^X yapısının cebirsel özellikleri incelenmektedir.

Anahtar Kelimeler: *Genelleştirilmiş Bulnanık Küme, L^X -Latisi, Çarpımsal Latis*

Abstract: In this study, $\mathcal{GF}(X)$ family of fuzzy sets which contain power set $\mathcal{P}(X)$ is constructed as ring and the elements of this construction are called as generalized fuzzy sets. Moreover, characteristics of L^X are analyzed.

Keywords: *Generalized Fuzzy Sets, Lattice L^X, Multiplicative Lattice.*

1. Giriş

Zadeh (1965), bir bulanık kümeyi şu şekilde tanımlamıştır. Bir A bulanık kümesi; X içindeki her bir nokta ile [0,1] aralığınıdaki bir gerel sayıyı eleştiren $\mu_A(x)$ fonksiyonuyla karakterize edilir. Böylece, bulanık kümeler; ancak üyelik fonksiyonlarıyla çalıştırıldığında varolan kümelerdir. Örneğin; yaşı simgeleyen bir bulanık küme s(X: 60, 70, 80) diye karakterize edilir. *L* ve L' latisleri için latis işlemlerini koruyan ve*L*'den L''ye (1-1) ve örten dönüşüm varsa, buna latis izomorfizması ya da kısaca izomorfizma denir. Eğer *L* latisinin herhangi bir A alt kümesi supA ve infA'yı içeriyorsa bu *L* latisine tamdır denir **(**Birkhoff, 1967, Iwamura, 1966). Burada **L**-bulanık kümelerin $\mathcal{LF}(X)$ ailesinin yapısını inceleyeceğiz. Daha sonra $\mathcal{P}(X)$ kuvvet kümesinin bir latis genişlemesine eşdeğerliği gösterilecek olan genelleştirilmiş bulanık kümelerin $\mathcal{SF}(X)$ ailesinin cebirsel yapısı çalışılacaktır. Ayrıca, **1)** G$\mathcal{F}(X)$ in genelleştirilmiş bulanık kümelerinin bir halkası, *X* in P (*X*) kuvvet kümesini içeren bir "tam Heyting cebiri " (tHc), **2)** L^X, X'den L'ye fonksiyon olmak üzere **L**-bulanık kümelerinin ailesi tanıtılacaktır.

2. Genelleştirilmiş Bulanık Kümeler

Tanım 1: Eğer $x_i, i \in I$ ve $y \in L$ için,

$\underset{i\in I}{\vee}(x_i \wedge y) = \left(\underset{i\in I}{\vee} x_i\right) \wedge y$ ise, dağılmalı bir tam L latisi bir tam Heyting cebiri olarak adlandırılır (tHc). Burada *I* keyfi kardinal sayıların bir indeks kümesidir (Takenti, 1981)

Tanım 2: Eğer L, *L* latisinin bir alt latisi ise, L'ye L 'nin bir genişlemesi denir. Eğer L'nin bir alt latisi olan L_1, L'nin L alt latisini ve L'nin M alt kümesini içeren minimal alt latis ise, L_1'e M'yi eklemekle elde edilen ve L_1 = L (M) ile göstertilen L 'nin latis genişlemesidir denir (Nakajima, 1989).

Ön Teorem 1: *L* dağılımlı latis olsun ve $\max L = 1$ ve $\min L = 0$ olsun. Ayrıca $\max \mathrm{L} = \max M = 1$ ve $\min \mathrm{L} = \min M = 0$ olacak şekilde L ve *M*, *L* nin alt latisleri olsunlar. O zaman L(*M*), $L_0 = \left\{ \overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} (a_i \wedge x_i) : a_i \in \mathrm{L},\ x_i \in M : n = 1,2,... \right\}$ şeklinde tanımlı L_0'a eşittir (Nakajima, 1989).

Tanım 3: $\vee$ ve $\wedge$ işlemlerine kapalı olan $\mathcal{GF}(X)$ ile göstereceğimiz aile için,

1) $\mathcal{GF}(X)$, $\vee$ ve $\wedge$ işlemlerine göre tam Heyting cebiri, **2)** $\mathcal{GF}(X)$, $P(X)$ i bir latis olarak içerir, **3)** $\vee$ ve $\wedge$ işlemleri $P(X)$ içinde $\cup$ ve $\cap$ ile aynıdır,

4) $\forall A \in \mathcal{GF}(X)$ için $A \vee X = X$ ve $A \wedge \varnothing = \varnothing$ koşulları sağlanırsa $\mathcal{GF}(X)$ e X in genelleştirilmiş, bulanık alt kümelerinin bir halkasıdır denir (Nakajima, 1989).

Tanım 4: Bir A , **L**-bulanık kümesi Xiçindeli bir x öğesiyle L_x içindeki bir $\mu_A(x)$ öğesini eşleştiren μ_A üyelik fonksiyonu ile karakterize edilir. Tüm **L**-bulanık kümelerinin ailesini $\mathcal{LF}(X)$ ile gösteriyoruz. Yani; $\mathcal{LF}(X)=\left\{\mu_A \mid \mu{:}X\to \bigcup_{x\in X} L_x\right\}$. $\mathcal{LF}(X)$ içindeki işlemler μ_A , $\mu_B \in \mathcal{LF}(X)$ için $\mu_{A\cup B}(x)=\mu_A(x)\vee\mu_B(x)$, $\mu_{A\cap B}(x)=\mu_A(x)\wedge\mu_B(x)$ 'dir.

Her bir L_x'i, L'ye eşit aldığımızda **L**-bulanık kümeleri Goguen'in (1967) $L-$bulanık kümelerine indirgenir. Eğer bi **L**-bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu basit ise bu **L**-bulanık kümesine basit fonksiyon denir. Yani eğer X in sonlu $\{E_1,...,E_n\}$ bölüntüsü ve L nin $\{A_1,...,A_n\}$ sonlu kümesi varsa, öyle ki; $x\in E_i$ $i=\{1,...,n\}$ için , $\mu_A(x)=A_i$ dir.

X deki bütün basit $L-$bulanık kümelerini $\mathcal{LS}(X)$ ile göstereceğiz (Nakajima, 1989).

Tanım 5: $L_1=P(E_1)$, $L_2=P(E_2)$ Boolean cebirleri için $L=P(E_1\text{x}E_2)$ Boolean cebirine L_1 ve L_2 nin iç çarpımı denir ve $L=L_1\otimes L_2$ ile gösterilir. $L_0\subseteq L_1$ alt latisi için;

$$h: L_0\to L_0^{'}=\{A\text{x}E_2 : A\in L_0\}$$

$h(A)=A\text{x}E_2$ olarak tanımlanan h dönüşümü bir izomorfizma olduğundan $L_0\cong L_0^{'}$ dür.

Bu durumda $L_0^{'}$, $L=L_1\otimes L_2$ nin bir alt latisidir. Böylece $L_0\subseteq L_1$ alt latisi verildiğinde L nin $L_0^{'}$ gibi bir alt latisinin varlığını ifade edebiliriz. Bu L_0 ın da L nin bir alt latisi olarak düşünülebileceğini gösterir. Çünkü $L_0\cong L_0^{'}$ idi. $\max L=Y$ ve $\min L=\varnothing$ olmak üzere L , $P(Y)$ nin bir alt latisi olsun. O zaman, $\mathcal{B}=P(X)$ ve L , $\mathcal{B}\otimes P(Y)=P(X\text{x}Y)$ nin alt latisleri olarak göz önüne alınabilirler (Nakajima, 1989).

Tanım 6: $\mathcal{S}\subset \mathcal{GF}(X)$ alt ailesi için;

i) $\forall A\in\mathcal{S}$ için $(A^t)^t=A$ olacak şekilde $A^t\in\mathcal{S}$ ***ii)*** $\forall\{A_i\}_{i\in I}\subset\mathcal{S}\Rightarrow\bigvee A_i\in\mathcal{S}$

ise, $\mathcal{S}$ ye $\mathcal{GF}(X)$ in bir bulanık $\sigma-$cebiridir denir.

Ön Teorem 2: $\mathcal{S}=P(X)$, $\wedge$ ve $\vee$ işlemleri yerine $\cap$ ve $\cup$ alalım. $m:\mathcal{S}\to \mathbb{R}_+^*$

$$m(A)=\begin{cases} A'\text{daki öğe sayısı} &, A \text{ sonlu ise}\\ \infty &, A \text{ sonsuz ise}\end{cases}$$

şeklinde tanımlı bulanık küme fonksiyonu bir ölçümdür. Buna sayma ölçümü denir.

3. L-Bulanık Kümeler

Tanım 7 Bir A kümesi üzerinde aşağıdaki koşulları gerçekleyen bir R bağıntısına kısmen sıralama bağıntısı adı verilir.

a) R yansımalıdır: Her $x\in A$ için xRx dir,

b) R ters simetriktir: Her $x,y\in A$ için $((xRy\wedge yRx)\Rightarrow x=y)$ dir,

c) R geçişlidir: Her $x,y,z\in A$ için $((xRy\wedge yRz)\Rightarrow xRz)$ dir.

A kümesi üzerinde bir R kısmen sıralama bağıntısı varsa, bu R bağıntısıyla birlikte A kümesine ya da (A,R) sıralı ikilisine kısmen sıralı küme denir.

Tanım 8 Bir A kısmen sıralı kümesinde her $x,y\in A$ için $\{x,y\}$ kümesinin eküs'ü ve ebas'ı varsa, A ya bir latis denir. Genellikle bir latisde $x\vee y=\text{eküs}(\{x,y\})$, $x\wedge y=\text{ebas}(\{x,y\})$ kısaltmalarına başvurulur.

Tanım 9 A bir latis ve $\varnothing\neq B\subseteq A$ olsun. $x,y\in B$ için, $x\vee y\in B$ ve $x\wedge y\in B$ oluyorsa, B ye A nın bir alt latisidir denir.

Tanım 10 Bir X kümesi üzerinde bir L bulanık kümesi $A: X\to L$ şeklinde tanımlı bir A fonksiyonudur, burada L bir latisdir. Böylece bulanık kümelerin eşitliği onların fonksiyonlar olarak eşitliği olur.

Tanım 11 Bir kısmen sıralı küme, boş olmayan her bir alt kümesinin ebas'ını ve eküs'ünü bulundurur ise bu kısmen sıralı kümeye tam latis denir.

Tanım 12 L^X X den L latisine olan fonksiyonların kümesi olsun.

$A, B \in L^X$, $x \in X$ için, $(A \vee B)(x) = A(x) \vee B(x)$ ve $(A \wedge B)(x) = A(x) \wedge B(x)$ ifadeleriyle L^X in kendisi de bir latis olur.

Tanım 13: L çarpımsal latisi, $*$ işlemi altında kapalı ve dağılım kurallarını sağlayan bir latistir. Yani, $A, B, C \in L$ için,

$A*(B \vee C) = (A*B) \vee (A*C)$ ve $(A \vee B)*C = (A*C) \vee (B*C)$ geçerli olmaları demektir.

4. L^X in Cebirsel Yapısı

Tanım 14: L^X , $*$ işlemine göre kapalı ve dağılım kurallarını sağlayan bir latistir, yani $A, B, C \in L^X$ için, $A*(B \vee C) = (A*B) \vee (A*C)$ ve $(A \vee B)*C = (A*C) \vee (B*C)$ kuralları geçerlidir. $*$ işlemine çarpım işlemi diyeceğiz. Böylece L^X bir çarpımsal latis olur.

Önerme 1: A, B ve C L^X çarpımsal latisinin öğeleri olsun. Bu durumda,

i) $A \le B \Rightarrow C*A \le C*B$ ve $A*C \le B*C$, ***ii)*** $(A \wedge B)*(A \vee B) \le (B*A) \wedge (A*B)$ dir.

İspat:

i) $A \le B \Rightarrow B*C = (A \vee B)*C = (A*C) \vee (B*C) \Rightarrow A*C \le B*C$.

ii) $(A \wedge B)*(A \vee B) = [(A \wedge B)*A] \vee [(A \wedge B)*B] \le (B*A) \vee (A*B)$.♦

Ön Teorem 3: L^X – tam latisi, $*$ işlemi altında $A*\left(\bigvee_{i\in I} B_i\right) = \bigvee_{i\in I}(A*B_i)$ ve $\left(\bigvee_{i\in I} A_i\right)*B = \bigvee_{i\in I}(A_i*B)$ dağılım kurallarını sağlayan bir tam sıralı yarı gruptur. Yarı grup eşitliğine L^X in üzerindeki eşitlik denir.

Tanım 15: L^X in 0 elemanı ve 1 elemanı $\forall A \in L^X$ için, $0 \wedge A = 0*A = A*0 = 0$ olduğundan 0 öğesine, L^X in sıfırı denir. $1 \vee A = 1*A = A*1 = 1$ olduğundan 1 öğesine, L^X in birimi denir.

Önerme 2: L^X tam latisi için, $\wedge$ işleminin yerine $*$ işlemini kullanırsak L^X bir tam dağılımlı yarı grup olur.

İspat: $A \in L^X$, $(B_i)_{i\in I} \subseteq L^X$ ise,

$A \wedge \left(\bigvee_{i\in I} B_i\right) = \bigvee_{i\in I}(A \wedge B_i)$ ve $\left(\bigvee_{i\in I} A_i\right) \wedge B = \bigvee_{i\in I}(A_i \wedge B)$, burada $(A_i)_{i\in I} \subseteq L^X$ dir.♦

Aralıkların tümünde sıfır bölen yoktur. (yani, $A*B = 0 \Rightarrow A = 0$ veya $B = 0$) ; bununla birlikte aralıkların çarpımları sıfır bölenlidir. L^X L nin yapısına sahip olduğundan, $*$ işlemi ; $A, B \in L^X$ için $(A*B)(x) = A(x)*B(x)$ şeklinde geçerlidir.

Kaynaklar

Birkhoff, G. ; Lattice Theory, 3rd ed., (AMS colloquim publications, Providence, RI), (1967).
Iwamura, T. ; Sokuron (Kyoritsu Shuppan, Tokyo), (1966).
Klement, E.P., and Schwyhla, W. ; Fuzzy $\sigma-$algebras and Fuzzy Measurable Functions, Fuzzy Sets and System, 4, (1980). 57-70
Nakajima, N. ; Generalized Fuzzy Sets, Fuzzy Sets and Systems 32, (1989). 307-314
Zadeh L.A. ; Fuzzy Sets, Information and Control, 8, (1965). 338-353