GENELLEŞTİRİLMİŞ BULANIK KÜMELER

Mehmet Şahin
Gaziantep Üniversitesi, Matematik Bölümü, 27310, Gaziantep

ÖZET:

Bu çalışmada öncelikle $\mathcal{P}(X)$ i bir alt aile olarak bulunduran bulanık kümelerin $\mathcal{GF}(X)$ ailesi bir halka olarak yapılandırılmakta ve bu yapının elemanları genelleştirilmiş bulanık kümeler olarak adlandırılmaktadır.Buna ek olarak L^X yapısının cebirsel özellikleri incelenmektedir.

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş Bulnanık Küme, L^X -Latisi, Çarpımsal Latis.

ABSTRACT:
In this study, $\mathcal{GF}(X)$ family of fuzzy setswhich contain power set $\mathcal{P}(X)$ is constructed as ring and the elements of this construction are called as generalized fuzzy sets. Moreover, characteristics of L^X are analyzed.

Key Words: Generalized Fuzzy Sets, Lattice L^X , Multiplicative Lattice.

GİRİŞ

Zadeh, bir bulanık kümeyi aşağıdaki gibi tanımlamıştır.
Bir A bulanık kümesi; X içindeki her bir nokta ile [0,1] aralığınıdaki bir gerel sayıyı eleştiren $\mu_A(x)$ fonksiyonuyla karakterze edilir. Böylece, bulanık kümeler; ancak üyelik fonksiyonlarıyla çalıştırıldığında varolan kümelerdir. Örneğin; yaşı simgeleyen bir bulanık küme s(X: 60, 70, 80) diye karakterize edilir. Zadeh(1965

*L*ve L' latisleri için latis işlemlerini koruyan ve*L*'den L''ye (1-1) ve örten dönüşüm varsa, buna latis izomorfizması ya da kısaca izomorfizma denir. Eğer *L* latisinin herhangi bir A alt kümesi supA ve infA'yı içeriyorsa bu *L* latisine tamdır denir. Birkhoff(1967), Iwamura(1966)

Bu çalışmada **L**-bulanık kümelerin $\mathcal{LF}(X)$ ailesinin yapısını inceleyeceğiz. Daha sonra $\mathcal{P}(X)$ kuvvet kümesinin bir latis genişlemesine eşdeğerliği gösterilecek olan genelleştirilmiş bulanık kümelerin

$\mathcal{SF}(X)$

ailesinin cebirsel yapısı çalışılacaktır.
Ayrıca,
1) G$\mathcal{F}(X)$ in genelleştirilmiş bulanık kümelerinin bir halkası, *X* in P (*X*) kuvvet kümesini içeren bir "tam Heyting cebiri " (tHc),
2) B=P(*X*) olmak üzere, bir genişletilmiş B(*L*) latisi,
3) L^X , X'den L'ye fonksiyon olmak üzere **L**-bulanık kümelerinin ailesi tanıtılacaktır.

1.Genelleştirilmiş Bulanık Kümeler

Tanım 1: Eğer $x_i, i \in I$ ve $y \in L$ için,

$$\bigvee_{i\in I} (x_i \wedge y) = \left(\bigvee_{i\in I} x_i\right) \wedge y$$

ise, dağılmalı bir tam L latisi bir tam Heyting cebiri olarak adlandırılır (tHc). Burada *I* keyfi kardinal sayıların bir indeks kümesidir. Takenti(1981)

Tanım 2: Eğer L, *L* latisinin bir alt latisi ise, L'ye L 'nin bir genişlemesi denir. Eğer L'nin bir alt latisi olan L_1, L'nin L alt latisini ve L'nin M alt kümesini içeren minimal alt latis ise, L_1'e M'yi eklemekle elde edilen ve L_1 = L (M) ile göstertilen L 'nin latis genişlemesidir denir. Nakajima(1989)

Ön Teorem 1: *L* dağılımlı latis olsun ve $\max L = 1$ ve $\min L = 0$ olsun.

Ayrıca $\max \mathcal{L} = \max M = 1$ ve $\min \mathcal{L} = \min M = 0$ olacak şekilde L ve *M*, *L* nin alt latisleri olsunlar. O zaman L(*M*);

$$L_0 = \left\{ \overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} (a_i \wedge x_i) : a_i \in \text{L},\ x_i \in M : n = 1,2,... \right\}$$

şeklinde tanımlı L_0'a eşittir.(Nakajima, N 1989)

İspat: L_0 ın bir elemanını, sonlu sayıda *i* ler için a_i 'ler sıfırdan farklı olmak üzere $\bigvee_i (a_i \wedge x_i)$ şeklinde gösterilir. L_0 'ın

$y = \bigvee_i (a_i \wedge x_i)$ ve $z = \bigvee_i (b_i \wedge x_i)$ elemanları için L dağılımlı olduğundan,

$$y \vee z = \left[\bigvee_i (a_i \wedge x_i) \right] \vee \left[\bigvee_i (b_i \wedge x_i) \right]$$
$$= \bigvee_i \left[(a_i \vee b_i) \wedge x_i \right] \in L_0$$

dır.

İkililiğin temel kuralından; $y \wedge z \in L_0$ dır. L'deki aynı işlemlere bağlı olarak L_0 'ın L'nin bir alt latisi olduğu da görülür. L_0 $\mathcal{L}$ ve M'yi içerir, çünkü $\mathcal{L}$ deki herhangi *a* ve *M* deki herhangi *x* için;

$$a = a \wedge 1 \quad \text{ve} \quad x = 1 \wedge x \in L_0$$

dır.

Buradan $\mathcal{L}$ ve M'yi içeren herhangi bir L' alt latisinin $\mathcal{L}$(*M*)'yi içerdiği görülür. Bu yüzden $\mathcal{L}$(*M*), $\mathcal{L}$ ve *M* yi içeren minimal alt latisdir.♦

Tanım 3: $\vee$ ve $\wedge$ işlemlerine kapalı olan
$\mathcal{GF}(X)$
ile göstereceğimiz aile için,

1) $\mathcal{GF}(X)$, $\vee$ ve $\wedge$ işlemlerine göre tam Heyting cebiri,

2) $\mathcal{GF}(X)$, $P(X)$ i bir latis olarak içerir,

3) $\vee$ ve $\wedge$ işlemleri $P(X)$ içinde $\cup$ ve $\cap$ ile aynıdır,

4) $\forall A \in \mathcal{GF}(X)$ için $A \vee X = X$ ve $A \wedge \varnothing = \varnothing$

koşulları sağlanırsa $\mathcal{GF}(X)$ e X in genelleştirilmiş, bulanık alt kümelerinin bir halkasıdır denir. Nakajima(1989)

Önce Goguen'in Goguen(1967) $L-$bulanık kümeleri, **L**-bulanık kümelerine genişletilecektir. $L_X -$ latisinin *X* içindeki bir *x* öğesiyle eşleştirildiğini varsayalım.

L $= \{L_x : x \in X\}$'dır.

Tanım 4: Bir A , **L**-bulanık kümesi Xiçindeli bir *x* öğesiyle L_x içindeki bir $\mu_A(x)$ öğesini eşleştiren μ_A üyelik fonksiyonu ile karakterize edilir.

Tüm **L**-bulanık kümelerinin ailesini $\mathcal{LF}(X)$ ile gösteriyoruz. Yani;

$$\mathcal{LF}(X) = \left\{ \mu_A \middle| \ \mu : X \to \bigcup_{x \in X} L_X \right\}.$$

$\mathcal{LF}(X)$ içindeki işlemler

$\mu_A , \mu_B \in \mathcal{LF}(X)$ için

$$\left.\begin{array}{l} \mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \\ \mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \end{array}\right. \text{'dir.}$$

Her bir L_x'i, L 'ye eşit aldığımızda **L**-bulanık kümeleri Goguen'in Goguen(1967) $L-$bulanık kümelerine indirgenir. Eğer bi **L**-bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu basit ise bu **L**-bulanık kümesine basit fonksiyon denir. Yani eğer X in sonlu $\{E_1,...,E_n\}$ bölüntüsü ve L nin $\{A_1,...,A_n\}$ sonlu kümesi varsa, öyle ki; $x \in E_i \;\; i=\{1,...,n\}$ için ,

$\mu_A(x) = A_i$ dir.

X deki bütün basit $L-$bulanık kümelerini $\mathcal{L}S(X)$ ile göstereceğiz. Nakajima(1989)

Tanım 5: $L_1 = P(E_1)$, $L_2 = P(E_2)$ Boolean cebirleri için $L = P(E_1 \mathrm{x} E_2)$ Boolean cebirine L_1 ve L_2 nin iç çarpımı denir ve $L = L_1 \otimes L_2$ ile gösterilir.

$L_0 \subseteq L_1$ alt latisi için;

$$h : L_0 \to L_0^{'} = \{A \mathrm{x} E_2 : A \in L_0\}$$

$h(A) = A\mathrm{x}E_2$ olarak tanımlanan h dönüşümü bir izomorfizma olduğundan $L_0 \cong L_0^{'}$ dür.

Bu durumda $L_0^{'}$, $L = L_1 \otimes L_2$ nin bir alt latisidir. Böylece $L_0 \subseteq L_1$ alt latisi verildiğinde L nin $L_0^{'}$ gibi bir alt latisinin varlığını ifade edebiliriz. Bu L_0 ın da L nin bir alt latisi olarak düşünülebileceğini gösterir. Çünkü $L_0 \cong L_0^{'}$ idi.

$\max L = Y$ ve $\min L = \varnothing$ olmak üzere L , $P(Y)$ nin bir alt latisi olsun. O zaman,

$\mathcal{B} = P(X)$ ve L , $\mathcal{B} \otimes P(Y) = P(X \mathrm{x} Y)$ nin alt latisleri olarak göz önüne alınabilirler. Nakajima(1989)

Tanım 6: $\mathcal{S} \subset \mathcal{GF}(X)$ alt ailesi için;

i) $\forall A \in \mathcal{S}$ için $(A^t)^t = A$ olacak şekilde $A^t \in \mathcal{S}$

ii) $\forall \{A_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{S} \Rightarrow \bigvee A_i \in \mathcal{S}$

ise, $\mathcal{S}$ ye $\mathcal{GF}(X)$ in bir bulanık $\sigma-$cebiridir denir.

Tanım 7: $A \wedge \varnothing = \varnothing$, $A \vee X = X$ olmak üzere,

$m : \mathcal{S} \to R_+^*$, $\mathcal{S} \subset \mathcal{GF}(X)$ için,

i) $\forall A \in \mathcal{S}$ için $m(A) \geq 0$, $m(\varnothing) = 0$

ii) $\forall A, B \in \mathcal{S}$ için $A \leq B \Rightarrow m(A) \leq m(B)$

iii) $\forall A, B \in \mathcal{S}$ için $m(A \vee B) + m(A \wedge B) = m(A) + m(B)$

iv) $\forall (A_n)_{n \in \mathrm{N}} \in \mathcal{S}^{\mathrm{N}}$, $A \in \mathcal{S} : (A_n) \uparrow A \Rightarrow m(A_n) \uparrow m(A)$

koşulları sağlanıyor ise m'ye bir genelleştirilmiş bulanık ölçüm, $(X, \mathcal{S})$'ye de ölçülebilir uzay denir.

Ön Teorem 2: $\mathcal{S} = P(X)$, $\wedge$ ve $\vee$ işlemleri yerine $\cap$ ve $\cup$ alalım. $m : \mathcal{S} \to \mathbf{R}_+^*$

$$m(A) = \begin{cases} A' \text{daki öğe sayısı} \;, & A \text{ sonlu ise} \\ \infty & , A \text{ sonsuz ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı bulanık küme fonksiyonu bir ölçümdür. Buna sayma ölçümü denir.

İspat:

i) $\forall A \in P(X)$ için $m(A) \geq 0$

$\varnothing \in P(X)$ için $m(\varnothing) = 0$.

ii) $A, B \in S = P(X)$ için $A \subseteq B$ ise A daki öğe sayısı B deki öğe sayısını geçemez. Bu $m(A) \leq m(B)$ olmasını ifade eder.

iii) $A, B \in S \Rightarrow m(A \vee B) + m(A \wedge B) = m(A) + m(B)$ olduğu

$A \vee B = A \cup B$, $A \wedge B = A \cap B$

konumuyla m nin klasik ölçüme indirgenmiş olmasından elde edilir.

$$\left.\begin{aligned} A/B &= A/(A \cap B) \\ A/B &= (A \cup B)/B \end{aligned}\right\} \Rightarrow A/(A \cap B) = (A \cup B)/B$$

$$\Rightarrow m(A)-m(A\cap B)=m(A\cup B)-m(B)$$
$$\Rightarrow m(A\vee B)+m(A\wedge B)=m(A)+m(B)$$

iv) $A\in S$ olmak üzere $(A_n)\uparrow A$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} A_n = A \quad \text{yani} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$$
$$\Rightarrow m\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)=m(A)\Leftrightarrow m(A_n)\uparrow m(A)$$

m ye S üzerinde bir ölçüm (sayma ölçümü) denir.♦

2. L-Bulanık Kümeler

Tanım 8: Bir A kümesi üzerinde aşağıdaki koşulları gerçekleyen bir R bağıntısına kısmen sıralama bağıntısı adı verilir.

a) R yansımalıdır: Her $x\in A$ için xRx dir,

b) R ters simetriktir: Her $x,y\in A$ için $((xRy\wedge yRx)\Rightarrow x=y)$ dir,

c) R geçişlidir: Her $x,y,z\in A$ için $((xRy\wedge yRz)\Rightarrow xRz)$ dir.

A kümesi üzerinde bir *R* kısmen sıralama bağıntısı varsa, bu R bağıntısıyla birlikte *A* kümesine ya da (A,R) sıralı ikilisine kısmen sıralı küme denir.

Bir kısmen sıralama bağıntısını göstermek için *R* yerine genellikle "$\le$" simgesi, kısmen sıralı küme olan (A,R) yerine de çoğunlukla $(A,\le)$ simgesi kullanılır. Böylece xRy yazmak yerine $x\le y$ yazar ve bu simgeyi "*x* küçük eşit *y*" ya da "*x* öğesi *y* den önce gelir" diye okuruz. "$x\le y$" ile "$y\ge x$" gösterimleri aynı anlamı taşırlar. Ayrıca "$x\le y$ ve $x\ne y$" ise, bu durumu kısaca "$x<y$" biçiminde yazarız. < bağıntısı yansımalı olmadığına göre bu bağıntının bir kısmen sıralama bağıntısı olamayacağını öncelikle belirtelim.

Tanım 9: Bir *A* kısmen sıralı kümesinde her $x,y\in A$ için $\{x,y\}$ kümesinin eküs'ü ve ebas'ı varsa, *A* ya bir latis denir.

Genellikle bir latisde $x\vee y=\text{eküs}(\{x,y\})$, $x\wedge y=\text{ebas}(\{x,y\})$ kısaltmalarına başvurulur.

Bir *A* latisinde $x,y,z\in A$ için

a) $x\le x\vee y\,,\, y\le x\vee y$

b) $(x\le y\,,\, z\le y)\Rightarrow x\vee z\le y$

c) $x\wedge y\le x\,,\, x\wedge y\le y$

d) $(x\le y\,,\, x\le z)\Rightarrow x\le y\wedge z$

özelliklerinin doğru olduğu tanımdan görülür

Tanım 10: *A* bir latis ve $\varnothing\ne B\subseteq A$ olsun. $x,y\in B$ için,

$x\vee y\in B$ ve $x\wedge y\in B$

oluyorsa, *B* ye *A* nın bir alt latisidir denir.

Tanım 11: Bir X kümesi üzerinde bir L bulanık kümesi $A: X\to L$ şeklinde tanımlı bir *A* fonksiyonudur, burada L bir latisdir. Böylece bulanık kümelerin eşitliği onların fonksiyonlar olarak eşitliği olur.

Tanım 12: Bir kısmen sıralı küme, boş olmayan her bir alt kümesinin ebas'ını ve eküs'ünü bulundurur ise bu kısmen sıralı kümeye tam latis denir.

Tanım 13: L^X X den L latisine olan fonksiyonların kümesi olsun.

$A,B\in L^X$, $x\in X$ için,

$(A\vee B)(x)=A(x)\vee B(x)$

$(A\wedge B)(x)=A(x)\wedge B(x)$

ifadeleriyle L^X in kendisi de bir latis olur.

L^X deki sıralama

$$A \le B \Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } A(x) \le B(x)$$

olarak verilir.

Tam latisler için homomorfizma kavramı genel latislerden daha özeldir.

L_1 , L_2 tam latisler

$\lambda : L_1 \to L_2$ ye

tanımlı bir dönüşüm olsun.

Eğer

$$1 \bigvee_{i\in I} a_i = \bigvee_{i\in I} 1 \ (a_i)$$

ise λ nin bir homomorfizma olduğu bilinmektedir. Yukarıdaki ifadenin duali de geçerlidir.

$$\bigwedge_{i=1}^{m}\left(\bigvee_{j=1}^{n} a_{i,j}\right) \ge \bigvee_{j=1}^{n}\left(\bigwedge_{i=1}^{m} a_{i,j}\right)$$

Min , max eşitsizliği herhangi bir latis için geçerlidir.

Bu durum, tam latislerde indislerin sonsuz olması halinde de doğrudur.

Tanım 14: L çarpımsal latisi, $*$ işlemi altında kapalı ve dağılım kurallarını sağlayan bir latistir. Yani, $A, B, C \in L$ için,

$$A*(B \vee C) = (A*B) \vee (A*C)$$

ve

$$(A \vee B)*C = (A*C) \vee (B*C)$$

geçerli olmaları demektir.

3. L^X in Cebirsel Yapısı

Tanım 15: L^X , $*$ işlemine göre kapalı ve dağılım kurallarını sağlayan bir latistir, yani $A, B, C \in L^X$ için,

$$A*(B \vee C) = (A*B) \vee (A*C)$$

ve

$$(A \vee B)*C = (A*C) \vee (B*C)$$

kuralları geçerlidir. $*$ işlemine çarpım işlemi diyeceğiz.

Böylece L^X bir çarpımsal latis olur.

Önerme 1: A, B ve C L^X çarpımsal latisinin öğeleri olsun.

Bu durumda,

i) $A \le B \Rightarrow C*A \le C*B$ ve $A*C \le B*C$,

ii) $(A \wedge B)*(A \vee B) \le (B*A) \wedge (A*B)$ dir.

İspat:

i) $A \le B \Rightarrow B*C = (A \vee B)*C = (A*C) \vee (B*C)$

$\Rightarrow A*C \le B*C$.

ii) $(A \wedge B)*(A \vee B) = [(A \wedge B)*A] \vee [(A \wedge B)*B]$

$\le (B*A) \vee (A*B)$.♦

Ön Teorem 3: L^X – tam latisi, $*$ işlemi altında

$$A*\left(\bigvee_{i\in I} B_i\right) = \bigvee_{i\in I}(A*B_i) \text{ ve } \left(\bigvee_{i\in I} A_i\right)*B = \bigvee_{i\in I}(A_i*B)$$

dağılım kurallarını sağlayan bir tam sıralı yarı gruptur.

Yarı grup eşitliğine L^X in üzerindeki eşitlik denir.

Tanım 16: L^X in 0 elemanı ve 1 elemanı

$\forall A \in L^X$ için,

$$0 \wedge A = 0 * A = A * 0 = 0$$

olduğundan 0 öğesine, L^X in sıfırı denir.

$$1 \vee A = 1 * A = A * 1 = 1$$

olduğundan 1 öğesine, L^X in birimi denir.

Önerme 2: L^X tam latisi için, $\wedge$ işleminin yerine $*$ işlemini kullanırsak L^X bir tam dağılımlı yarı grup olur.

İspat: $A \in L^X$, $(B_i)_{i \in I} \subseteq L^X$ ise,

$$A \wedge \left(\bigvee_{i \in I} B_i \right) = \bigvee_{i \in I} \left(A \wedge B_i \right)$$

ve

$$\left(\bigvee_{i \in I} A_i \right) \wedge B = \bigvee_{i \in I} \left(A_i \wedge B \right) ,$$

burada $(A_i)_{i \in I} \subseteq L^X$ dir.♦

Aralıkların tümünde sıfır bölen yoktur. (yani, $A * B = 0 \Rightarrow A = 0$ veya $B = 0$) ; bununla birlikte aralıkların çarpımları sıfır bölenlidir.

L^X L nin yapısına sahip olduğundan, $*$ işlemi ; $A, B \in L^X$ için $(A * B)(x) = A(x) * B(x)$ şeklinde geçerlidir.

L^X üzerindeki bir geçişli, yansımalı $\leq$ sırası $A, B \in L^X$ için, $A \leq B \Leftrightarrow A \vee B = B$ olarak tanımlanır, kolayca görülür ki $\vee$ üst sınır işleminin en küçük üst sınırıdır. L^X in bir öğesinin, X evrensel kümesi üzerinde bir $L-$bulanık kümesi olduğunu biliyoruz basit olarak X üzerinde bir L kümesi veya X üzerinde bir bulanık küme, $L-$bulanık kümedir.

Fakat X üzerinde bir küme değildir.

Prensip olarak, X üzerindeki bir L bulanık kümesi X in alt kümelerinin bir L kümesidir. Yani L^{2^X} in bir öğesidir. X üzerinde bir bulanık L kümesi, L^{L^X} 'in bir öğesidir.

X evrensel küme, $L-$latisi; $A : X \to L$ şeklinde tanımlı fonksiyonu bir A $L-$bulanık kümedir.

A, B $L-$bulanık kümeleri verilsin.

$$(A \vee B)(x) = A(x) \vee B(x),$$

$$(A \wedge B)(x) = A(x) \wedge B(x)$$

tanımlarıyla L^X bir latistir.

$\mathcal{A} \subseteq L^X$ olsun,

i) $0,1 \in \mathcal{A}$,

ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^t \in \mathcal{A}$,

iii) $(A_n)_{n \in \mathrm{N}} \in \mathcal{A}^{\mathrm{N}} \Rightarrow \bigvee_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ ise

$\mathcal{A}$ - ya $L-$bulanık $\sigma-$cebiri denir. $L = [0,1]$ alındığında (E.P.Klement and W.Schwyhla 1980) anlamında bulanık $\sigma-$cebirine indirgenmiş olur. Bu bulanık $\sigma-$cebiri genelleştirilmiş $\sigma-$cebiridir.

$$A \in L^X \Rightarrow A^t \in L^X \ni (A^t)^t = A .$$

$A^t = 1 - A$, $x \in X$ için

$$A^t(x) = 1(x) - A(x)$$

$$(A^t)^t(x) = 1 - (1(x) - A(x)) = A(x) .$$

Kaynaklar

Birkhoff, G. ; Lattice Theory, 3rd ed., (AMS colloquim publications, Providence, RI), (1967).

Iwamura, T. ; Sokuron (Kyoritsu Shuppan, Tokyo), (1966).

Klement, E.P., **and Schwyhla**, **W**. ; Fuzzy $\sigma -$algebras and Fuzzy Measurable Functions, Fuzzy Sets and System, 4, (1980). 57-70

Nakajima, N. ; Generalized Fuzzy Sets, Fuzzy Sets and Systems 32, (1989). 307-314

Zadeh L.A. ; Fuzzy Sets, Information and Control, 8, (1965). 338-353