MİNİMAL AĞIRLIKLI DOMİNANT ALT KÜME PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN BİR YAKLAŞIM

Urfat G. Nuriyev
Ege Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü 35100 Bornova, İzmir
Burak Ordin
Ege Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü 35100 Bornova, İzmir

Özet: Bu çalışmada; bir işe birden fazla işlem noktasının karşı getirilebilmesi bakımından Atama Problemi'nin genelleştirilmesi olarak düşünülebilecek Minimal Ağırlıklı Dominant Alt Küme isimli bir kombinatoryal optimizasyon problemi incelenmiştir. Bu problem, Global Optimizasyon problemlerinin Kesen Açılar Yöntemi (Cutting Angle Method) ile çözümünde karşılaşılan bir Yardımcı probleme denk bir problem olarak ele alınıp, problemin matematiksel modeli tanımlanmış, ekonomik yorumu verilmiş ve özellikleri incelenmiştir. Daha sonra problemi çözmek için yeni bir algoritma önerilip, C++ dilinde programı tasarlanmış ve hesaplama denemelerinin sonuçları verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Minimal Ağırlıklı Dominant Altküme Problemi, Global Optimizasyon, Atama Problemi, Kesen Açılar Yöntemi*

1. Giriş

Son yıllarda Global Optimizasyon problemlerinin büyük bir sınıfını çözmek için Kesen Açılar Yöntemi (KAY) (Cutting Angle Method, (CAM)) olarak adlandırılan yeni bir yöntem üzerinde çalışılmaktadır (Andramonov ve ark 1999, Rubinov 2000). Bu yöntem konveks minimizasyonundaki Kesen Yüzey Metodu'nun bir genelleştirilmesi olarak geliştirilmektedir ve iteratiftir. Yani her bir adımında gene bir global optimizasyon problemi olan bir yardımcı problem (altproblem) in çözülmesi gerekir.

"Minimal Ağırlıklı Dominant Alt Küme Problemi" (MADAK) olarak adlandırdığımız problem boole değişkenli kombinatoryal bir optimizasyon problemi olup, yukarıda adı geçen Yardımcı Probleme denk bir problem gibi incelenmeye başlanmıştır (Nuriyev 2001, 2002, 2003).

Bu çalışmada, Global Optimizasyon problemlerinin Kesen Açılar Yöntemi ile çözümünde karşılaşılan yardımcı problemin MADAK problemine dönüşümü gösterilmiş, MADAK probleminin matematiksel modeli ve ekonomik yorumu verilmiştir. Daha sonrada problemin özelliklerinden yararlanarak çözüm için yeni bir algoritma önerilmiştir. Algoritma C++ dilinde tasarlanmış ve farklı boyutlu problemlerle hesaplama denemeleri yapılmıştır.

2. Yardımcı Problemin Formülasyonu

Varsayalım ki, (m*n) boyutlu (l_i^k) matrisi verilsin ve (l_i^k) matrisinin ilk n satırı diagonal matris olsun. (k = 1,…,m - satırları, i = 1,…n - sütunları göstersin.) Yani k ≤ n ve k ≠ i iken m ≥ n ve $l_i^k = 0$, diğer durumlarda $l_i^k > 0$ dır.

Burada, h(x) fonksiyonu $h(x) = \max_k \min_{i \in I(l^k)} l_i^k x_i$, $I(l^k) = \{i: l_i^k > 0\}$ olarak tanımlandığında problemin modeli aşağıdaki gibi verilir:

Altproblem

$$h = \min_x h(x) . \qquad (1)$$

$$x \in S = \{x \left| \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1,...,n \right.\} \qquad (2)$$

3. Yardımcı Problemin Boolean Bir Probleme Dönüşümü

İzleyen dönüşüm altında *p=m-n*, $u_i^j = \frac{1}{l_i^i} - \frac{1}{l_i^{j+n}}$, i=1,2,…n; j = 1,2,…,p.

altproblemin (l_i^k) matrisi bir (u_i^j) matrisine dönüşür.

$Sg(x) = \begin{cases} 1, \text{ eğer } x \geq 0 \\ 0, \text{ eğer } x < 0 \end{cases}$ fonksiyonu ve $x_i^j, i = 1,2,...,n; j = 1,2,...,p$ değişkenleri dikkate

alındığında: $x_i^j = \begin{cases} 1, & \text{eğer } 1_i^{j+n} \to 1_i^j \text{ dönüşümü gerçeklendiğinde} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}.$

O zaman (1)-(2) Altproblemi izleyen Boolean 0-1 programlama problemine dönüştürülür.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} u_i^j x_i^j \to \min_{x_i^j} \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^j \leq 1, \text{ j = 1, 2,…, p,} \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{p} x_i^j \leq 1, \text{ i = 1, 2,…, n,} \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} x_i^j \geq 1, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^j \geq 1, \text{ j = 1, 2,…, p,} \tag{7}$$

$$x_i^j = 0 \vee 1, \text{ i = 1, 2,…, n; j = 1, 2,…, p.} \tag{8}$$

$$y_i^j = Sg\left(\max_{k=\overline{1,p}} \left\{ u_i^k x_i^k \right\} - u_i^j \right), \text{ i = 1, 2,…, n ; j = 1, 2,…, p,} \tag{9}$$

[4] makalesinde izleyen teorem ispatlanmıştır.

Teorem 1 (1)-(2) Altproblemi ve (3)-(9) problemi denktir.

4. Minimal Ağırlıklı Dominant Altküme Problemi

(3)-(9) problemini Minimal Ağırlıklı Dominant Altküme problemi olarak adlandıralım. Bu problemi aşağıdaki yorumlayabiliriz.

(u_i^j), $u_i^j \geq 0$ (j = 1, 2, ..., p; i = 1, 2, ..., n) olmak üzere, p*n boyutlu bir matristir.

Burada amaç matrisin elemanlarından öyle bir altküme seçilmelidir ki,

i) Seçilmiş elemanların toplamı enküçük olsun,

ii) Her bir satır için ya bir seçilmiş eleman vardır yada bu satırın öyle bir elemanı vardır ki, bu elemanın yerleştiği sütunda bulunan ve ondan büyük olan seçilmiş bir eleman vardır.

Bu problemin ekonomik yorumu aşağıdaki gibi verilebilir:

p sayıda (j = 1, 2, ..., p) işlemden oluşan bir iş n sayıda (i = 1, 2, ..., n) işlemcide icra görebilir. Varsayalım ki (u_i^j) matrisi bu işlemlerin verilen işlemcilerde icra görmesi için gerekli zamanı (veya maliyeti) göstersin,

Eğer i. sütun için aşağıdaki koşul sağlanıyorsa

$$u_i^{j_1} \leq u_i^{j_2} \leq ... \leq \mathrm{u}_i^{j_p} \tag{10}$$

$u_i^{j_1}$ - j_1 işleminin i. işlemcideki icra zamanını, $u_i^{j_2}$ - j_1 ve j_2 işlemlerinin i. işlemcideki icra zamanını, $u_i^{j_p}$ - bütün işlemlerin ($j_1, j_2, \ldots, j_p$) birlikte i. işlemcideki icra zamanını gösterir.

İşlemler işlemciler arasında öyle paylaştırılmalıdır ki, bütün iş en kısa zamanda / en az maliyetle icra olunsun. Açıktır ki, bu problem Atama Problemi'nin bir genellemesidir (Rubinov, 2000).

Atama problemi karmaşıklığı $O(r^3)$ (r = max{p, n}olmak üzere) olan Macar metoduyla çözülebilmesine rağmen Madak problemi NP-Zor sınıftandır (Nuriyev, 2003).

5. Madak Problemi için Yeni Bir Çözüm Algoritması

MADAK Problemini çözmek için problemin özellikleri göz önüne alınarak çok aşamalı bir yöntem önerilmiştir: Bu yöntemde esas problemin çözüm kümesini oluşturabilecek en iyi eleman/elemanlar kümesini belirlemektir. Problem matrisinin elemanları belli kriterlere göre seçilerek çözümler üretilir. İlk olarak bir başlangıç olurlu çözümü problemin özellikleri yardımı ile belirlenir ve daha sonra elde edilen çözümler bir önceki ile kıyaslanarak daha iyi ise yeni çözüm olarak alınır.

6. Hesaplama Denemeleri

Testlerin gerçek durumlara uygunluğunu tatmin etmek için matrislerin elemanları aşağıdaki kısıtlamaları sağlamak koşulu ile üretilmiştir.

1. Hiçbir j_1 satırı başka bir j_2 satırını majorite etmez, yani matriste $\forall i,\ l_i^{j_1} \geq l_i^{j_2}$ koşulunu sağlayan iki j_1 *ve* j_2 satırları yoktur.
2. $0 \leq u_i^j \leq 10000$, $i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,p}$ ve u_i^j ler tamsayıdırlar.

Denemeler gösterir ki, önerilmiş algoritma çoğunlukla optimal çözümü bulur ve diğer durumlarda ise nispi hata çok küçük olur, başka bir ifadeyle optimal çözümden çok az farklı olur(en kötü 0.04 olarak tespit edildi). Bunun yanı sıra problemin büyük boyutlu matrisler için de kısa zamanda çözüldüğü görülmektedir. Deneme sonuçları sunumda açıklanacaktır.

7. Sonuç

Bu çalışmada Global Optimizasyon Probleminin çözümünde yardımcı problem gibi kullanılan Minimal Ağırlıklı Dominant Altküme Problemi olarak adlandırdığımız Bir Boole Değişkenli problemin özelliklerine dayanarak yeni bir sezgisel algoritma önerilmiştir. Algoritmadaki işlemlerin sayısı $O\left(n \cdot p \cdot \log_2 p\right)$ ile sınırlıdır. C++ dilinde hazırlanmış programla yapılmış denemeler algoritmanın effektifliğinin yüksek olduğunu göstermektedir. Algoritmanın Global Optimizasyon Problemlerini çözmek için Kesen Açılar yöntemi ile birlikte kullanılması düşünülmektedir.

Kaynaklar

M.Yu.Andramonov, A.M.Rubinov and B.M.Glover , Cutting Angle methods in Global Optimization, *Applied Mathematics Letters*, Vol.12, pp. 95-100, 1999.

Dj.A.Babayev, An Exact Method for Solving the Subproblem of the Cutting Angle Method of Global Optimization In book "Optimization and Related Topics", in Kluwer Academic Publishers, series "Applied Optimization", Vol 47, December, Dordrecht/ Boston/ London, pp. 472-482, 2000..

U.G. Nuriyev, On the solving of a combinatoric problem, Proceeding of XXII National Meeting on Operational Research and Industrial Engineering, Ankara, p.29, 2001.

U.G. Nuriyev, On the solving of a Global Optimization Subproblem, Proceeding of XXIII National Meeting on Operational Research and Industrial Engineering, Istanbul, p.33, 2002.

U.G. Nuriyev, B, Ordin , Dominating Subset with Minimal Weight Problem and the survey of its complexity, Proceeding of XXIII National Meeting on Operational Research and Industrial Engineering, Istanbul, p.33, 2002.

U.G. Nuriyev, On Complexity of a Global Optimization Problem, Mathematical&Computational Applications, Vol.8, No.1, pp. 27-34, 2003.

Ordin B., On Some Properties of the Solution of the Dominating Subset with Minimal Weight Problem, A Euro Conference for young OR researchers and practitioners ORP^3, September 21-26, Kaiserslautern, Germany, 351-360, 2003.

A.M. Rubinov, *Abstract Convexity and Global Optimization*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2000.