# DOĞRUSAL OLMAYAN KARMA TAMSAYILI PROGRAMLAMA PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN SUBGRADİYENT YÖNTEMİ

**Gürkan Öztürk, Özden Üstün**
*Osmangazi Üniversitesi, Endüstri Mühendisliği Bölümü, 26030, Eskişehir*

**Özet:** Bu çalışmada doğrusal olmayan karma tamsayılı programlama problemlerinin çözümü için subgradiyent yöntemi kullanılmıştır. Öncelikle tamsayı değişkenler 0–1 tamsayı değişkenlere dönüştürülmüş daha sonra da 0–1 tamsayı değişkenler sürekli hale getirilmiştir. Bu dönüşüm ile elde edilen sürekli problem genellikle konveks olmayan yapıdadır. Sürekli problemin çözümünde, ilk olarak genel optimizasyon problemleri için Azimov ve Gasimov tarafından geliştirilen, genişletilmiş Lagrange ikil problem kurulmuştur. İkil fonksiyonun en iyi çözümümün bulunmasında Gasimov tarafından önerilen subgradiyent yöntemi kullanılmıştır. Subgradiyent yöntemi literatürden alınan test problemleri üzerinde denenerek elde edilen sonuçlar verilmiştir.

***Anahtar Kelimeler:*** *Doğrusal Olmayan Karma Tamsayılı Programlama, Genişletilmiş Lagrange İkillik, Subgradiyent Yöntemi*

# THE SUBGRADIENT METHOD FOR SOLVING MIXED INTEGER NON-LINEAR PROGRAMMING PROBLEM

**Abstract:** In this study, we interested in for solving nonlinear mixed integer programming problems (NLMIP) by using the subgradient algorithm. Firstly, the MINLP are converted into continuous nonlinear problems by adding only one constraint and not adding new variables. Such problems are not convex in general. Convexity and differentiability conditions and linearization and convexification techniques are not used. For solving continuous nonlinear problems we construct dual problems with zero duality gap by using augmented Lagrangian fuction earlier introduced by Azimov and Gasimov for general optimization problems. For solving the dual problem the subgradient algorithm introduced by Gasimov was used. Finally, computational results by using the subgradient methods are given for some literature test problems.

***Keywords:*** *Mixed Integer Nonlinear Programming, Augmented Lagrangian Duaility, Subgradient Method*

## 1.Giriş

Doğrusal olmayan karma tamsayılı problemlerin (DOKTP) genel şekli aşağıdaki gibidir.

$$(P)\qquad \begin{aligned} & g(x) \le 0 \\ & h(x) = 0 \\ & x \in X \text{ k.a.} \\ & \text{Enk } f(x) \end{aligned} \qquad (1)$$

$g{:}E_n \to E_m$ olan $g(x)' = (g_1(x)\ ,\ g_2(x)\ ,\ ...\ g_m(x)\ )$ vektörü, $h{:}E_n \to E_l$ olan $h(x)' = (\ h_1(x),\ h_2(x)\ ,\ ...\ h_l(x)\ )$ vektörü ve $f{:}E_n \to E_1$ 'dir.

$X = \{\ x = (x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_q)$: $\underline{u}_i \le x_i \le \overline{u}_i$ } ve tamsayı, $i = 1,...,k; x_i \ge 0, i = k+1,...,q$

$\underline{u}_i$ ve $\overline{u}_i$ , $x_i$ 'nin sırasıyla alt ve üst sınırlarıdır.

Tamsayılı problemlerin çözümünde kullanılan en yaygın yöntemler dal-sınır algoritması temelli yöntemlerdir. Bununla birlikte Taha (1975)'nın da işaret ettiği gibi ilk geliştirilen dal-sınır algoritması, dallandırma kuralının doğrusallık kabulüne dayandığı için (1) problemini çözmeye uygun değildir. Dakin (1965) tarafından önerilmiş olan güncellenmiş Land-Doig yöntemi dallandırma kuralını doğrusallık kabulünden kurtarmıştır. Ancak Dakin'in algoritması, ele alınan doğrusal olmayan tamsayılı modelin dal-sınır algoritmasıyla çözümünde dallandırma ağacının her düğümünde elde edilen çözümün bütünsel eniyi olmasına dayanır. Bu ise Dakin'in yöntemiyle ancak amaç fonksiyonunun içbükey kısıtların dışbükey olduğu problemlerin eniyi çözümlerinin bulunabileceği anlamına gelir. Lagrange gevşetme ve ayrıştırma teknikleri de doğrusal ve doğrusal olmayan problemlerin çözümünde yoğun olarak kullanılmaktadır. Lagrange yöntemlerinin özellikle dışbükey problemlerin çözümünde oldukça başarılı olmasının temelinde güçlü ikillik teoremi yer almaktadır. Bu yöntemler, Gasimov (2000) tarafından işaret edildiği gibi (1) problemi dışbükey olmadığında genellikle ikil aralık ile sonuçlanmaktadır. Günümüzde dışbükey olmayan problemlerin eniyi çözümlerinin bulunmasında yaygın kullanılan yöntemlerden birisi de ceza fonksiyonu yöntemidir, Bazaraa (1993). Ceza probleminin çözümünün, ceza parametresinin yeterince büyük seçilmesiyle asıl problemin eniyi çözümüne yakınsayacağı Bazaraa (1993)'nın kitabında gösterilmiştir. Ancak ceza parametresinin çok büyük alınması hesapsal birçok güçlüğe sebep olmaktadır. İlk olarak Azimov ve Gasimov (1999) tarafından dışbükey olmayan problemler için geliştirilmiş genişletilmiş Lagrange fonksiyonu yardımıyla kurulan ikil modelin eniyi çözümü, asıl modelin eniyi çözümüne eşittir. Dolayısıyla bu yöntemle ikil aralık ortadan kaldırılmıştır.

## 2.Problem ve çözüm yaklaşımı

Öncelikle tamsayı değişkenlerin *0-1* tamsayı değişkenlere dönüştürülmesi gerekmektedir. Bunun için gerekli dönüşüm formülasyonu Li(1992) tarafından verilmiştir. Daha sonra, *n* adet *0-1* tamsayı değişken içeren (1) problemini sürekli probleme dönüştürmek için izleyen kısıt modele eklenir.

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^2) = 0, x \in [0,1]^n \tag{2}$$

Kısıt fonksiyonları izleyen şekilde gösterilmiştir.

$$h(x) = (h_1(x),...h_m(x), g_1(x)+s_1,....,g_l(x)+s_l, h_{m+1}(x) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^2)),\ s_i \geq 0\ ,\ i=1,...,l \tag{3}$$

Sürekli problem doğrudan dışbükey programlama teknikleriyle çözülemez. Sürekli problemin (SP) genişletilmiş Lagrange fonksiyonunu ve ikil problemi izleyen şekilde kurulur.

Genişletilmiş Lagrange Fonksiyonu:

$$L(x,v,c) = f(x) + c\left[\sum_{i=1}^{m}(h_i(x))^2 + \sum_{i=m+1}^{l}(g_i(x)+s_i)^2 + (\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^2))^2\right]^{\frac{1}{2}} - \langle v, h(x)\rangle \tag{4}$$

$x \in [0,1]^n, v \in R^{m+l+1}$ ve $c \in R_+$ . $(v,c)$ vektörü, lagrange çarpanları vektörü olarak isimlendirilir. $R_+$ ile $[0,+\infty)$ aralığı gösterilmiştir.

İkil fonksiyon $\theta$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\theta(v,c) = \underset{x\in[0,1]^n}{Enk}\{L(x,v,c)\}\ ,\ v \in R^{m+l+1}\ \text{ve}\ c \in R_+ . \tag{5}$$

Sürekli problemin ikil problemi:

$$(D)\quad Enb\ D = \underset{v\in R^{m+l+1}, c\in R_+}{Enb}\ \theta(v,c) \tag{6}$$

Bu şekilde kurulmuş ikil problem dışbükeydir, Gasimov(2000). İkil problem kurulurken herhangi bir dışbükeylik ve diferansiyellenebilirlik şartı konulmamıştır. İkil problem ceza parametresi içermemektedir. Güçlü ikillik teoremi Gasimov (2000) tarafından verilmiştir. Sürekli problem güçlü ikillik teoreminin bütün şartlarını sağlar.

### Subgradiyent algoritması

**A.1.** *(Başlangıç Adım):* $(v^1,c^1) \in R^{m+l+1} \times R_+$ olan bir vektör ve $\varepsilon$ toleransını seç, $k$=1 al. Adım 2'ye geç.

**A.2.** *(Temel Adım):* Verilmiş çarpanlar ($v^k$, $c^k$) için, izleyen kısıtsız problemi çöz.

$$\underset{x\in[0,1]^n}{Enk}\left(L(x,v^k,c^k)\right)$$

$x^k$, A.2. deki kısıtsız problemin eniyi çözümü olsun. Eğer $\|h(x^k)\| \leq \varepsilon$ ise dur. İkil problem (*D*)'nin çözümü ($v^k$,$c^k$), (SP) probleminin çözümü $x^k$ 'dır. Diğer durumlarda Adım 3'e git.

**A.3.** *(Adım Uzunluğu Hesabı)*

Çarpanların değerlerini izleyen şekilde hesapla:

$$v^{k+1} = v^k - s^k h(x^k)\ ,\ c^{k+1} = c^k + (s^k + \beta^k)\|h(x^k)\|$$

$s^k$ ve $\beta^k$, pozitif sabit adım uzunluklarıdır. $k$=$k+1$ al ve Adım 2' ye git.

## 3.Hesapsal Sonuçlar

Subgradiyent yöntemi Li (1992) tarafından verilen dördüncü, altıncı ve Floudas vd. (1999) tarafından verilen Ex12.2.6 test problemleri için denenmiştir. Test problemlerin çözümü için subgradiyent yöntemi GAMS kullanılarak modellendi ve MINOS çözücüsü ile çözümler bulundu.

Subgradient algoritmasının, test problemlerine uygulanmasından önce parametrelere değer atanması gerekmektedir. Başlangıç adımında sonlandırma kriteri olarak verilen $\varepsilon$'na pozitif değer atanmasına gerek kalmamaktadır. Algoritmanın adımları, uygun 0-1 tamsayı çözüm ile sonlanmaktadır. $\varepsilon = 0$, alınmıştır. $(v^1,c^1)\in R^{m+l+1} \times R_+$, başlangıç Lagrange çarpanları için $\boldsymbol{0} = (0,0,...,0)$ vektörüne yakın noktalar verilmiştir.

Adım uzunluğu için $s_k = \dfrac{\alpha(\bar{\theta} - \theta(v^k,c^k))}{5\|h(x^k)\|}$ formülü kullanılmıştır. Formülde $\alpha = 1$ ve $\beta^k =$ 0,95 $s_k$ olarak alınmıştır, $\bar{\theta}$, ikil problem için bir üst sınırdır. Bu parametreler farklı şekillerde de belirlenebilmektedir. Yöntem bu parametrelerin değerlerine karşı hassastır.

Tablo 1 Subgradiyent yöntemi ile test problemlerinin çözümleri

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Li4 | $\bar{\theta}$ | $k$ | $c$ | $v_1$ | $v_2$ | $\theta$ | $x_1$ | $x_2$ | $s$ | | | | | | | | | | |
| | 1 | 2 | 0.76 | 0.39 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | | | | | | | | | | |
| Li6 | $\bar{\theta}$ | $k$ | $c$ | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $\theta$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | | | |
| | 10 | 6 | 34.13 | 2.94 | 0.59 | 9.59 | -8.67 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 5 | 2 | 3 | | | |
| Ex.12.2.6 | $\bar{\theta}$ | $k$ | $c$ | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ | $v_6$ | $\theta$ | $x$ | $y$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
| | 0 | 2 | 35.74 | -17.9 | -2.35 | -3.14 | 0 | 0.39 | 0 | -17 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10 | 1 |

Test problemlerinin çözümleri Tablo 1'de verilmiştir. Her problem için son ardıştırmada elde edilen değerler gösterilmektedir.

**4. Sonuç**

Bu çalışmada subgradiyent yöntemi ile MINLP problemlerinin çözümü araştırılmıştır. Literatürden alınan farklı test problemleri için en iyi çözümler elde edilmiştir. Çalışmanın uzantısında daha fazla sayıda ve büyük boyutlu test problemleri üzerinde algoritma test edilecektir.

**Kaynaklar**


**Azimov A.Y. and Gasimov R.N.**, On weak conjugacy, weak sub differentials and duality with zero gap in nonconvex optimization, *International Journal Of Applied Mathematics*, 1, 171-192, 1999.

**Azimov, A.Y. and Gasimov, R.N.**, Stability and Duality of Nonconvex Problems via Augmented Lagrangian, *Cybernetics and Systems Analysis*, 38, 412-421, 2002.

**Bazaara, M.S., Sherali, H.D and Shetty, C.M.**, *Non-linear programming: theory and algorithms*, John Willey and Sons Inc., New York., 1993.

**Dakin, R.,** A tree search algorithm for mixed integer programming problems, *Comput. J.*, 8, pp.250-255, 1965.

**Floudas , A.C. ve diğerleri,** *Handbook of Test Problems in Local and Global Optimization. (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht),* Chapter 12, 1999.

**Gasimov R.N.**, The subgradient method for solving non-convex programs., *Proceedings of XXI. YAEM Cong.*, Gazimağusa, pp. 374-377,12-14 June, 2000.

**Li, H.L.,** An approximate method for local optima for nonlinear mixed integer programming problems, *Computers and Operations Research.* 19(5), 435-444, 1992.

**Taha H.A.**, *Integer Programming: Theory, Applications and Computations,* AcademicPress, NY, 1975.