DİREKT DÜZELTME YÖNTEMİNİN GENELLEŞTİRİLMİŞ OLABİLİRLİK ORANI KONTROL ŞEMALARINA UYARLANMASI

Murat Caner Testik
Çukurova Üniversitesi, Mühendislik Mimarlık Fakültesi, Endüstri Mühendisliği Bölümü, 01330, Adana

Özet: Kalite kontrol şemaları bir dizi hipotez testi olarak değerlendirilebilirler. Bu hipotez testlerinde sınanan alternatif, kontrol şemasının saptanabilir sebepleri yakalama performansını belirlemekte önemlidir. Örneğin Shewhart kontrol şemaları izlenmekte olan kalite değişkeninin ortalamasında meydana gelecek anlık değişimleri, kümülatif toplam şemaları ise basamak şeklindeki değişimleri alternatif hipotezlerinde kullanmaktadırlar. Saptanabilir bir sebepten dolayı kalite değişkeninin ortalamasında oluşan izin alternatif hipotezdekinden farklı bir yapıya sahip olduğu durumlarda kontrol şemasının kusurları tesbit süresi uzayabilmektedir. Bazı özel durumlarda bir saptanabilir sebebin kalite değişkeninde oluşturacağı iz bilinebilmekte ve bu bilgi kontrol şemasının tasarımında kullanılabilmektedir. Bu amaçla, periyodik ve doğrusal izleri tesbit etmek için genelleştirilmiş olabilirlik oranı (GLR) kontrol şemaları kullanılmaktadır. Ancak, GLR şemalarının bir dez avantajı hesaplama yoğunluğudur. Bu çalışmada, GLR şemalarının hesap yoğunluğunu azaltmak için direkt düzeltme yöntemi önerilmekte ve bazı performans karşılaştırmaları yapılmaktadır.

Anahtar Kelimeler: *Genelleştirilmiş Olabilirlik Oranı, Kontrol Şeması, Direkt Düzeltme*

Abstract: Quality control schemes may be thought as a sequence of hypothesis tests. The alternative hypothesis tested is important in determining the detection performance for an assignable cause. For example, Shewhart control charts test impulse changes in the mean of the monitored quality characteristic whereas cumulative sum control charts test step changes, in the alternative hypothesis. Detection of faults may be delayed in cases where the pattern of an assignable cause in the mean of the quality variable is different from the one in the alternative hypothesis. In some cases, a fault pattern on the mean of the quality variable may be known due to an assignable cause and this information may be used in the design of a control chart. For this purpose, generalized likelihood ratio (GLR) control charts are used to detect periodic and linear patterns. However, one disadvantage of GLR schemes is the computational intensiveness. In this study, direct smoothing method is proposed to decrease the computational requirements of GLR charts and several performance comparisons are done.

Keywords: *Generalized Likelihood Ratio, Control Charts, Direct Smoothing*

1. Giriş

Shewhart, kümülatif toplam (CUSUM) ve üstel ağırlıklı hareketli ortalama (EWMA) gibi geleneksel kalite kontrol şemaları izlenmekte olan kalite değişkeninin ortalamasında meydana gelebilecek genel değişimleri tesbit etmek için tasarlanmışlardır. Saptanabilir bir sebepten dolayı ortalamada öngörülen değişim veya zaman içinde oluşacak iz kontrol istatistiklerinin geliştirilmesinde kullanılır. Saptanabilir sebeplerin kalite değişkeninin ortalamasında bırakacağı iz bilindiği durumlarda yukarıda adı geçen genel kalite kontrol şemalarının yerine daha gelişmiş ve özel kontrol şemaları tasarlanabilir.

İzlenmekte olan kalite değişkenini y ile tanımlayalım. Saptanabilir bir sebebin var olmadığı bir durumda bu kalite değişkenini

$$y_t = \mu + a_t,\ \text{t=1,2,...},$$

saptanabilir bir sebebin var olduğu bir durumda da

$$y_t = \mu + a_t + f(t, \boldsymbol{\theta}, \tau) \quad , \ t \geq \tau$$

olarak modellediğimizi varsayalım. Burada t zamanı, μ kalite değişkeninin ortalamasını, a, normal dağılımlı, ortalaması sıfır ve varyansı σ^2 olan bir rasgele değişkeni, $f(.)$, kalite değişkenin ortalamasının zaman içindeki değişimini gösteren bir fonksiyonu, τ, değişimin başlangıç zamanını, ve $\boldsymbol{\theta}$, $1 \times k$ parametre vektörünü ifade etmektedir. Matematiksel olarak değişim fonksiyonunun açılımı

$$f(t, \boldsymbol{\theta}, \tau) = \sum_{i=1}^{k} \theta_t(i) z_t(i) \quad , \quad \text{t} \geq \tau$$

olsun. Burada $\theta_t(i),\ i = 1,...,k$ bileşenlerin katsayılarını ve $\text{z}_\text{t}(\text{i}),\ \text{i} = 1,...,\text{k}$ bileşen fonksiyonlarının t zamanındaki değerini tanımlamaktadır. Değişim fonksiyonuna bir örnek olarak

$$f(t,\boldsymbol{\theta},\tau)=\theta(1)+\theta(2)(t-\tau)+\theta(3)\sin\left(\omega(t-\tau)\right)+\theta(4)\cos\left(\omega(t-\tau)\right)$$

verilebilir. Buradan itibaren $\mu=0$ kabul edilecek ve t'nin son aldığı değer T olarak gösterilecektir.

Saptanabilir bir sebepten dolayı kalite değişkeninin ortalamasındaki izin bilindiği durumlar için Runger ve Testik (2003) GLR kontrol şemalarını geliştirmişlerdir. Bu kontrol şemaları iz fonksiyonunun bilindiği durumlarda ve iz fonksiyonunun bilindiği fakat parametrelerinin bilinmediği durumlarda kümülatif puan (CUSCORE) (Box ve Ramirez (1992)) kontrol şemaları ile karşılaştırılmış, avantajları ortaya konmuştur. İz fonksiyonunun bilindiği fakat parametrelerinin bilinmediği durumlar için en küçük kareler yöntemi (LS) kullanılarak parametreler kestirilmekte, parametre değeri için bir alt limit θ_l değeri kullanılması önerilmektedir. İşlem yoğunluğunun azaltılması için bir gözlem aralığı kullanılmakta ve hesaplamalar son w (w = 30 önerilmiştir) gözlem kullanılarak yapılmaktadır. Gözlem aralıklı GLR kontrol istatistiği

$$g_T=\max_{T-w\le j\le T}\left[\frac{1}{\sigma^2}\sum_{t=j}^{T}f(t,\theta,j)(y_t-\mu)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=j}^{T}f(t,\theta,j)^2\right]$$

herbir yeni T zamanında hesaplanıp bir kontrol limiti h ile karşılaştırılarak GLR kontrol şeması oluşturulur. Parametre değeri kestiriminde herbir j değerinden T'ye kadar olan gözlemler kullanılarak en küçük kareler kestirimi hesaplanır ve dolayısı ile çift maksimizasyon yapılmaktadır.

Bu çalışmada, iz fonksiyonunun bilindiği fakat parametre vektörü $\boldsymbol{\theta}$ 'nın bilinmediği durumlar için parametre kestiriminde en küçük kareler yönteminin yerine direkt düzeltme (DS) yöntemi kullanılarak işlem yoğunluğu azaltılmaktadır. İki tip iz fonksiyonu, bir sinüs dalgası ve bir doğrusal eğilim kullanılmaktadır.

2. Direkt Düzeltme Yöntemi

Direkt düzeltme (Montgomery, Johnson, ve Gardiner (1990)) yeni verileri kullanılarak parametre kestirimini güncelleyen bir yöntemdir. Güncelleme için azalan ağırlıklı en küçük kareler kriteri kullanılarak ortalamadaki izin tahmin hataları kareleri toplamı minimize edilir. GLR kontrol istatistiğinin hesaplanmasında kullanılacak iz fonksiyonu tahmin değeri $f(t,\hat{\theta},\tau)$ için direkt düzeltme yöntemi bu bölümde açıklanacaktır.Yinelemeli bir yöntem olması dolayısı ile herbir gözlem değerinin elde edilmesi en küçük kareler yönteminde olduğu gibi w tane kestirimin yapılmasını gerektirmemekte ve işlem yükü azaltılmaktadır. Bunun yanı sıra, hesap aralığındaki gözlem sayısının az olmasından dolayı elde edilebilecek kötü kestirim olasılığı düşürülmektedir.

En küçük kareler kriterinin hesaplanmasında kullanılan gözlemlere birer ağırlık ω_t^2 verilerek hatalar kareler toplamı (SSE)

$$SSE=\sum_{t=1}^{T}\omega_t^2\left(y_t-f(t,\hat{\theta},\tau)\right)^2$$

değerini en küçükleyen parametrelerin belirlenmesi ağırlıklı en küçük kareler olarak adlandırılır. Kullanılan ağırlıklar üstel olarak azalacak şekilde $\omega_{T-t}^2=\beta^t$, t=0,...,T-1 ve $0<\beta<1$ olarak tanımlanırsa gözlemler zaman sıralarına göre sondan başa azalan önemle değerlendirilir ve bu üstel ağırlıklı azalan kareler olarak adlandırılır. Üstel ağırlıklı azalan kareler normal denklemi $C_T\hat{\theta}_T=c_T$ kullanılarak, C_T^{-1} mevcut olduğu durumlarda, parametre tahmini $\hat{\theta}_T=C_T^{-1}c_T$ hesaplanabilir. Burada, $\hat{\theta}_T$ $k\times 1$ parametre tahminleri vektörü, $C_T=(WZ)'(WZ)$, W $T\times T$ diyagonal ω_t, $t=1,...,T$ ağırlık matrisi, $c_T=Z'W^2\mathbf{y}$ ve $\mathbf{y}$, $T\times 1$ gözlemler y_t, $t=1,...,T$ vektörüdür.

İz fonksiyon bileşenlerinin zaman içindeki değişimini

$$z_{t+1}(i)=1_{i1}z_t(1)+1_{i2}z_t(2)+...+1_{ik}z_t(k),\quad \text{i}=1,...,\text{k} \tag{1}$$

şeklinde ifade edebildiğimizi varsayalım ve bir $k\times k$ matris L ile bu doğrusal kombinasyondaki katsayıları $1_{i,j}$ i=1...k, j=1...k gösterelim. Başka bir ifade ile $\mathbf{z}_{t+1}=L\mathbf{z}_t$ ve bir başlangıç değeri $\mathbf{z}_0$ için $\mathbf{z}_{t+1}=L^t\mathbf{z}_0$ olduğu gösterilebilir. Bu sebeple L geçiş matrisi olarak adlandırılır. Denklem (1) $z_t(i)$ bileşenlerinin sadece üstel, polinom ve trigonometrik fonksiyonlar olduğu durumlarda sağlanır ancak birçok iz bu fonksiyonlar ile ifade edilebilir. $C_T=\sum_{t=1}^{T}\beta^{T-t}z_tz_t'$ olarak tanımlanırsa bir limit değer

$C \equiv \lim_{T\to\infty} C_T$ mevcuttur. Parametre kestirimleri $\hat{\boldsymbol{\theta}}_T = L\hat{\boldsymbol{\theta}}'_{T-1} + C^{-1}\mathbf{z}_T(y_T - \mathbf{z}'_{T+1}\hat{\boldsymbol{\theta}}_{T-1})$ hesaplanarak direkt düzeltme yinelemeleri yapılabilir. Ayrıca iz fonksiyon tahmini $f(T+1,\hat{\boldsymbol{\theta}},\tau) = \mathbf{z}'_{T+1}\hat{\boldsymbol{\theta}}_T$ kullanılarak GLR control istatistiği hesaplanabilir.

3. Performans Karşılaştırması

GLR kontrol şemaları iz fonksiyon parametresinin bilindiği ve bilinmediği durumlarda en küçük kareler ve direkt düzeltme kestirim yöntemleri kullanılarak Tablo 1 ve 2 de karşılaştırılmıştır. Perfomans kriteri olarak ortalama tespit süreleri (ARL) hesaplanmıştır. Karşılaştırmalar için kullanılan iz fonksiyonları; eğimi 0.1 olan bir doğrusal iz ve periyodu $(t-0.5)\pi/2$, büyüklüğü $\theta = 1$ olan bir sinus dalgasıdır. Benzetişimler Matlab programı kullanılarak ve iz mevcut olmadığı durumlarda ortalama yanlış sinyal sıklığını (ARL_0) yaklaşık 300 gözlem verecek kontrol limiti *h* belirlenerek yapılmıştır. Ortalaması 0,varyansı 1 olan iid Normal dağılımlı sayılar üretilmiş ve iz fonksiyonu başlangıç ve durağan durumlarda üretilen veriye eklenerek kontrol şeması performansı *w* = 30 için değerlendirilmiştir. Doğrusal eğilim ve sinüs dalgası için direkt düzeltme yönteminde kullanılan değerler sırasıyla (2) ve (3) te verilmiştir.

$$\beta = 0.9,\ \mathbf{z_0} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\ L = \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix}10 & -90\\-90 & 1710\end{bmatrix}, C^{-1}\mathbf{z}_T = \begin{bmatrix}0.19\\0.01\end{bmatrix}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathbf{0} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\beta = 0.9, \mathbf{z_0} = \begin{bmatrix}\sin(0)\\\cos(0)\end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix}4.74 & 0\\0 & 5.26\end{bmatrix}, C^{-1}\mathbf{z}_T = \begin{bmatrix}0.00\\0.19\end{bmatrix}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathbf{0} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \tag{3}$$

Tablo 1. Doğrusal iz için GLR kontrol şeması ARL performansı (eğim 0.1)

		Bilinen $\boldsymbol{\theta}$	LS Kestirimi	LS ($\theta_j = 0.05$)	DS Kestirimi
	İz Başlangıcı	*h*= 3.05	*h*= 5.2	*h*= 4.5	*h*=2.45
ARL_0		300.4 (4.10)	294.6 (4.11)	306.8 (4.30)	306.6 (4.18)
ARL_1	$\tau = 0$	11.9 (0.04)	13.2 (0.05)	12.2 (0.05)	12.7 (0.04)
ARL_1	$\tau = 50$	11.4 (0.05)	13.0 (0.05)	11.9 (0.05)	12.6 (0.05)

Tablo 2. Sin [$(t-0.5)\pi/2$] iz için GLR kontrol şeması ARL performansı

		Bilinen $\boldsymbol{\theta}$	LS Kestirimi	LS ($\theta_j = 0.5$)	DS Kestirimi
	İz Başlangıcı	*h*= 4.5	*h*= 5.8	*h*= 5.4	*h*=2.4
ARL(0)		323.8 (4.52)	311.90 (4.32)	322.1 (4.50)	338.8 (4.55)
ARL(1)	$\tau = 0$	18.6 (0.15)	20.4 (0.20)	19.7 (0.18)	18. 9 (0.14)
ARL(1)	$\tau = 50$	17.1 (0.16)	19.1(0.18)	18.3 (0.18)	17.8 (0.14)

Tablo 1'de verilen doğrusal iz için GLR şeması ARL_1 sonuçlarında DS kestirimi LS kestirimine oldukça yakındır. Bunun yanısıra Tablo 2'deki sinüsü dalgası için DS kullanılarak elde edilen performans LS kestiriminden daha iyi sonuçlar vermiştir. Bunun yanısıra işlem yoğunluğu azalmaktadır.

4. Sonuçlar

Bir saptanabilir sebebin gözlemlerde bırakacağı izin bilindiği ancak bu izin parametrelerinin bilinmediği durumlar için GLR kontrol şemalarına direkt düzeltme kestirimi uygulanmıştır. Elde edilen ortalama kusuru tespit etme süreleri en küçük kareler kestirim sonuçları ile karşılaştırılmış, performansların yakın olduğu sonucuna varılmıştır.

Kaynaklar

Box, G.E.P ve Ramirez, J., Cumulative score charts. *Quality and Reliability Engineering International,* 8, 17-27, 2001.

Montgomery,D.C.,Johnson,L.A.,veGardiner,J.S.,Forecasting&TimeSeriesAnalysis,McGrawHill,1990.

Runger, G.C. ve Testik, M.C., Control charts for monitoring fault signatures: Cuscore versus GLR, *Quality and Reliability Engineering International,* 19, 387-396, 2003.