

## KISITLANDIRILMIŞ ÇOK DEĞİŞKENLİ ÜSTEL AĞIRLIKLIL HAREKETLİ ORTALAMA KONTROL ŞEMALARI

Murat Caner Testik

Çukurova Üniversitesi, Mühendislik Mimarlık Fakültesi, Endüstri Mühendisliği Bölümü, 01330, Adana

**Özet:** Tek değişkenli kalite kontrol şemaları, izlenen kalite değişkeninin ortalamasındaki artışları (azalışları) tesbit etmek için tek taraflı veya hem artış hem de azalışların tesbit etmek için çift taraflı olarak tasarlanırlar. Çok değişkenli kalite kontrol şemalarında tek ve çift taraflı kavramları kullanılmayıp benzer bir sınıflandırma yönel ve yönel olmayan kontrol şemaları olarak yapılabilir. Bu çalışmada, çok değişkenli üstel ağırlıklı hareketli ortalama (MEWMA) kontrol şemaları, tek değişkenli ve tek taraflı kontrol şemalarının çok değişkenli olarak uyarlanmasıyla tasarlanmaktadır. Başka bir deyişle, MEWMA kontrol şemaları izlenen kalite değişkenlerinin ortalamalarındaki artışları (azalışları) yakalamak için hassaslaştırılmakta, azalışlara (artışlara) olan duyarlılık azaltılmaktadır. Kontrol istatistiğinin hesaplanmasında kuadratik programlama yöntemi kullanılmaktadır. Kısıtlandırılmış MEWMA kontrol şemalarının tasarımı, uygulanması ve performansının MEWMA kontrol şemasınıniki ile karşılaştırması bu bildirinin ana hatlarını oluşturmaktadır.

**Anahtar Kelimeler:** Çok Değişkenli Üstel Ağırlıklı Hareketli Ortalama, Sıra Kısıtlı İstatistiksel Sonuç Çıkarım, Tek-Taraflı Kontrol Şemaları, Kuadratik Programlama

**Abstract:** Univariate quality control schemes are designed as one-sided or two-sided to detect increases (decreases) or both increases and decreases, respectively, in the mean of the monitored quality characteristic. For multivariate control schemes the terms one and two-sided is not used but a classification is done as direction-specific and directionally-invariant. In this study, multivariate exponentially weighted moving average (MEWMA) control schemes are designed by adapting the univariate one-sided control schemes to multivariate settings. In other words, MEWMA control charts are sensitized to increases (decreases) in the mean of the monitored quality characteristics and sensitivity to decreases (increases) is lowered. Quadratic programming is used in the calculation of the control statistic. Design, application and performance comparisons of the restricted MEWMA control charts with the MEWMA control chart will be covered in this paper.

**Keywords:** Multivariate Exponentially Weighted Moving Average, Order Restricted Statistical Inference, One-Sided Control Charts, Quadratic Programming

### 1. Giriş

Ki-kare ( $\chi^2$ ), çok değişkenli üstel ağırlıklı hareketli ortalama (MEWMA) ve çok değişkenli kümülatif toplam (MCUSUM) kontrol şemalarının izlenen ortalama vektörünün hedef değerden sapmalarını tespit etme hassasiyeti sadece sapmanın büyüklüğüne bağlı, sapma vektörünün yönüne doğrudan bağlı değildir (Runger ve Testik (2004), Lowry ve arkadaşları (1992)). Bu özellik çok değişkenli kalite kontrolde yönel olmayan şemalar olarak adlandırılır. Yönel olmayan kontrol şemaları ortalamadan herhangi bir yönde olabilecek sapmaları yakalamada etkindirler. Ancak bazı durumlarda kalite değişkenlerinin sadece belirli yönlerde (pozitif veya negatif) sapacağı bilinebilir. Bu gibi durumlarda kontrol istatistiği her bir yön için hassaslaştırılmak yerine kısıtlandırılmış yönlerde hassaslaştırılarak daha etkin kontrol şemaları tasarlanabilir.

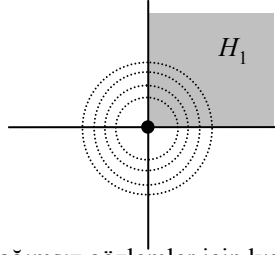
Çok değişkenli normal dağılımlı ve zaman ( $t$ ) içinde bağımsız gözlem vektörlerini  $y_t$  ile, bu vektörlerin  $p$  bileşenini de  $y_{it}$  ( $i = 1, \dots, p$ ) ile gösterelim. Ortalama vektörü  $\mu$ 'nün saptanabilir bir sebebin olmadığı koşullarda sıfır vektörüne eşit,  $\mu_0 = \mathbf{0}$ , olduğunu varsayalım. Gözlemlerin kovaryans matrisini  $\Sigma$  ile gösterirsek  $y_t : N_p(\mu, \Sigma)$ . Tasarlanan kontrol şemasının test ettiği boş hipotez ve buna karşı gelen alternatif hipotez

$$H_0 : \mu_i = 0$$

$$H_1 : \mu_i \geq 0$$

olsun (eşitsizlik en az bir  $i$  değeri için ( $i=1, \dots, p$ ) geçerli olmak kaydı ile). Testik ve Runger (2004) bu durum için kısıtlandırılmış ki-kare kontrol şemalarını geliştirmiştir. Sınanan alternatif hipotez bağımsız ve

normal dağılımlı iki değişken için Şekil 1’de gösterilmiştir. Bu aslında tek değişkenli ve tek taraflı bir hipotez testinin çok değişkenli bir duruma uyarlanmasıdır.



Şekil 1. İki değişkenli bağımsız gözlemler için kısıtlandırılmış alternatif hipotez

Ki-kare kontrol şemalarının ortalamada meydana gelebilecek küçük ve orta büyüklükteki sapmaları tespit etmede çok etkin olmadığı bilinmektedir. Ortalama vektöründe meydana gelen sapmaların büyüklüğü genellikle merkezi-olmama parametresi,  $\delta^2$

$$\delta^2 = \boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}$$

kullanılarak ölçülür. Ki-kare gibi yönel olmayan kontrol şemalarının ortalama vektöründeki sapmaları tespit etme performansı her bir  $\delta^2$  değeri için sabit olup, sapma vektörünün yönü  $\delta^2$  değerini belirleyerek dolaylı yoldan şema performansını etkiler.

Ki-kare şemalarının orta ve küçük büyüklükteki sapmaları yakalamadaki dezavantajı kısıtlandırılmış ki-kare kontrol şemalarında da mevcuttur. Ancak her iki kontrol istatistiğinin hesaplanmasında üstel düzeltme yöntemi kullanılarak performans iyileştirilebilir. Kısıtlandırılmış ki-kare şemaları en büyük olabilirlik oranı kullanılarak geliştirilmiştir ve yöneldir (sapma vektörünün yönü ve büyüklüğü kontrol şemasının performansını etkiler). Fasso (1999)'da  $p=2$  özel durumu için kısıtlandırılmış MEWMA kontrol şemalarını incelemiş ancak genelleştirmemiştir. Bu çalışmada iki ve çok değişkenli durumlar için bir çözüm yöntemi önerilmekte ve simülasyonlarla performans karşılaştırılması yapılmaktadır.

## 2. Kısıtlandırılmış MEWMA (RMEWMA) Kontrol Şemaları

Gözlem vektörleri  $\mathbf{y}_t$ , bir  $r$  ( $0 < r \leq 1$ ) sabiti ile üstel olarak düzeltilerek yeni vektörler  $\mathbf{z}_t = r\mathbf{y}_t + (1-r)\mathbf{z}_{t-1}$  hesaplanırsın. Saptanabilir bir sebebin ortalama vektörü  $\boldsymbol{\mu}$ 'nün bazı veya tüm bileşenlerini sıfır değerinden pozitif bir değere, başka bir deyişle pozitif orthant  $\mathbf{O}$ 'ya saptırdığını varsayalım. Dolayısıyla üstel düzeltilmiş vektörlerin ortalama vektörü  $\boldsymbol{\mu}_z$  de  $\mathbf{O}$ 'ya sapacaktır. Problem bir hipotez testi olarak yazılacak olursa;  $H_0 : \boldsymbol{\mu}_z = \mathbf{0}$  ve  $H_1 : \boldsymbol{\mu}_z \in \mathbf{O}$ . Log-olabilirlik oranı istatistiği

$$\ln \left( \frac{f(\mathbf{z}, \mathbf{0})}{\max_{\boldsymbol{\mu}_z \in H_1} f(\mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}_z)} \right) \quad (1)$$

kullanılarak RMEWMA kontrol şemaları oluşturulabilir. Denklem (1)'de pay

$$f(\mathbf{z}, \mathbf{0}) = ke^{-\frac{(2-r)}{2r}\mathbf{z}_t'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{z}_t}$$

kolayca hesaplanabilir ancak payda

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_z = \max_{\boldsymbol{\mu}_z \in H_1} f(\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}_z) = \arg \max_{\mu_{z(i)} \geq 0} ke^{-\frac{(2-r)}{2r}(\mathbf{z}_t - \boldsymbol{\mu}_z)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{z}_t - \boldsymbol{\mu}_z)} \quad (2)$$

hesabı bu kadar kolay değildir. Fasso (1999)  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_z$  hesabında  $p=2$  için izdüşüm yöntemi kullanmıştır ancak bu çok değişkenli durumlar için pratik değildir. Buna karşın denklem (2)'deki  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_z$  kestirimi

$$Q = \min (\mathbf{z}_t - \boldsymbol{\mu}_z)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{z}_t - \boldsymbol{\mu}_z) \text{ veya}$$

$$Q = \min -2\mathbf{z}_t'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}_z + \boldsymbol{\mu}_z'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}_z$$

s.t.

$$\mu_{z(i)} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, p)$$

şeklinde formülize edilerek ve kuadratik programlama kullanılarak çözülebilir. Burada kısıtlar matematiksel olarak kapalı konveks polihedral konik formdadır ve optimal çözüm mevcuttur.

$Q$  fonksiyonunun minimum değeri  $-\hat{\mu}'_z \Sigma^{-1} \hat{\mu}_z$  olup optimal çözüm  $\hat{\mu}_z$  maksimum olabilir kestirimidir. Bu sonuçlar kullanılarak (1) de verilen kontrol istatistiğinin  $(2-r/r)\hat{\mu}'_z \Sigma^{-1} \hat{\mu}_z$  olduğu gösterilebilir. Bu istatistik, sabit ihmal edilirse  $\hat{\mu}'_z \Sigma^{-1} \hat{\mu}_z$ , her bir yeni gözlem için hesaplanarak ve bir üst kontrol limiti  $h$  ile karşılaştırılarak RMEWMA şemaları oluşturulur. Kontrol limiti  $h$  için kapalı bir form mevcut değilse de benzetişim kullanılarak kabul edilebilir bir ortalama yanlış alarm sıklığı sağlayan değer elde etmek mümkündür.

### 3. Performans Karşılaştırması

MEWMA kontrol şemaları 2 ve 4 değişkenli durumlarda, çeşitli yön ve büyüklükte sapma vektörleri kullanılarak, Tablo 1'de RMEWMA ile karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma performans ölçütü olarak ortalama tespit süresi (ARL) kullanılmıştır. MEWMA performansı Markov zincirleri (Runger ve Prabhu (1996)) kullanılarak, RMEWMA performansı ise benzetişim kullanılarak hesaplanmıştır. Benzetişimler herbir durum için 5000 replikasyon ve Matlab bilgisayar programı kullanılarak yapılmıştır. Gözlemler çok değişkenli normal dağılımdan eş korelasyonlu ( $\rho$ ) bir kovaryans matrisi kullanılarak üretilmiştir. Dört değişkenli durum için negatif korelasyon kovaryans matrisi tersinebilir olmadığı için incelenmemiştir. MEWMA için kullanılan kontrol limiti  $h_1$  ve RMEWMA için kullanılan kontrol limiti  $h_2$  ile gösterilmiştir.

Tablo 1. RMEWMA ve MEWMA Kontrol Şemalarının ARL Performans Karşılaştırması

| $p$ | $h_1$ | $h_2$ | $\rho$ | Ortalama Vektörü | $\delta$ | RMEWMA ( $r=0.1$ ) | MEWMA ( $r=0.1$ ) |
|-----|-------|-------|--------|------------------|----------|--------------------|-------------------|
| 2   | 8.68  | 6.9   | 0.5    | [ 0 0 ]          | 0.000    | 202.65             | 203.59            |
|     |       |       | 0.5    | [ 1 0 ]          | 1.155    | 7.49               | 8.52              |
|     |       |       | 0.5    | [ 1 1 ]          | 1.155    | 7.19               | 8.52              |
| 2   | 8.68  | 5.9   | -0.5   | [ 0 0 ]          | 0.000    | 205.07             | 203.59            |
|     |       |       | -0.5   | [ 1 0 ]          | 1.155    | 6.81               | 8.52              |
|     |       |       | -0.5   | [ 1 1 ]          | 2.000    | 3.63               | 4.47              |
| 4   | 12.8  | 10.6  | 0.5    | [ 0 0 0 0 ]      | 0.000    | 205.85             | 205.10            |
|     |       |       | 0.5    | [ 1 0 0 0 ]      | 1.265    | 8.24               | 8.99              |
|     |       |       | 0.5    | [ 1 1 0 0 ]      | 1.549    | 6.38               | 7.03              |
|     |       |       | 0.5    | [ 1 1 1 0 ]      | 1.549    | 6.22               | 7.03              |
|     |       |       | 0.5    | [ 1 1 1 1 ]      | 1.265    | 7.72               | 8.99              |
|     |       |       | 0.5    | [ 1 1 1 1 ]      | 1.265    | 7.72               | 8.99              |

Tablo 1'den görülebileceği gibi RMEWMA kontrol şemaları MEWMA kontrol şemalarından daha etkin ARL sonuçları vermektedir. RMEWMA kontrol şemalarının performansı sapma vektörünün büyüklüğüne ve aynı zamanda yönüne bağlıdır. Örneğin  $p = 4$  için sapma büyüklüğünün 1.265 olduğu iki durum incelenirse, ARL değerleri yöne bağlı olarak 8.24 ve 7.72 olarak elde edilmiştir. Bu sapma vektörlerinden ilki pozitif orthantın yüzeyinden diğeri ise tam ortasından geçmektedir.

### 4. Sonuç

Çok değişkenli kalite kontrol problemlerinde izlenen kalite vektörünün değişimlerinin herbir bileşen için pozitif veya negatif bölgelerde kısıtlandırıldığı durumlarda geleneksel kalite kontrol şemalarından daha etkin bir üstel düzeltme kontrol şemasının tasarımı yapılmış ve çözüm yöntemi önerilmiştir. Performans karşılaştırmalarıyla bu etkinlik gösterilmiştir. Tasarlanan kontrol şeması yönel degildir ve sabit büyüklükteki bir sapma vektörünün yönüne göre performansı değişmektedir.

### Kaynaklar

- Fasso, A., One-sided MEWMA control charts. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 28, 381-401, 1999.
- Lowry, C.A., Woodall, W.H., Champ, C.W. ve Rigdon, S.E., A multivariate exponentially weighted moving average control chart. *Technometrics*, 34, 46-53, 1992.
- Runger, G.C. ve Prabhu, S.S., A markov chain model for the multivariate exponentially weighted moving averages control chart. *Journal of the American Statistical Association*, 91, 1701-1706, 1996.
- Runger, G.C. ve Testik, M.C., Multivariate Extensions to CUSUM Control Charts. *Quality and Reliability Engineering International*, baskıda, 2004.
- Testik, M.C. ve Runger, G.C., A multivariate one-sided control chart: Restricted chi-square control chart for multivariate process monitoring, *under 2nd revision*.