ANA DAĞITIM ÜSSÜ YER SEÇİMİ PROBLEMLERİNDE ÇOKLU-ATAMA MODELLERİ

Mehmet Mustafa Tanrıkulu, Bahar Yetiş Kara
Bilkent Üniversitesi Endüstri Mühendisliği Bölümü, 06533, Ankara

Özet: Ana dağıtım üssü (ADÜ) yer seçimi problemleri, akışların belli merkezlerde (ADÜlerde) birleştirilip yeniden dağıtıldığı ulaştırma problemleridir. Bu problemlerin havayolları, posta teslim ağları ve telekomünikasyon gibi bir çok uygulama alanı vardır. Bu problemlerde bilinen temel bilgiler, sistemde "*n*" tane nokta olduğu ve her "*i*" , "*j*" nokta çiftinin arasında bilinen "W_{ij}" (yolcu, posta, bilgi vb) kadar akış olması gerektiğidir.

ADÜ problemlerinde belirlenmesi gereken iki temel unsur vardır: merkez üslerinin seçimi ve talep noktalarının bu merkezlere atanması. Atamanın iki alternatifi vardır. Birincisi tekli-atama ikincisi de çoklu-atamadır. Tekli-atama sisteminde talep noktalarına giren ve çıkan akışlar tek bir merkez üssünü kullanarak sağlanmaktadır. Çoklu-atama sisteminde ise bu akışlar birden çok merkez üssü kullanabilirler.

p-merkezli ADÜ yer seçimi problemi, ilk olarak O'Kelly tarafından 1987 yılında tanımlanmıştır. Literatürdeki çalışmalar tekli ve çoklu-atama olmak üzere iki ana dalda ilerlemektedir. Çalışmaların büyük kısmı tekli-atama üzerinde yapılmıştır. Tekli-atama ile ilgili bilinen en iyi modeller arasında Ernst ve Krishnamoorthy (1996) Skorin Kapov vd. sayılabilir. Çoklu-atama sistemi ile ilgili ilk model Campbell tarafından 1991 yılında verilmiştir. Biz bu çalışmamızda çoklu-atama sistemleri ile ilgili literatürde verilen modellerin karşılaştırmasını veriyoruz.

1. Modeller

Literatürde çoklu-atama alanında beş model bulunmaktadır: Model 1: Campbell 1991, Model 2: D. Skorin Kapov, J. Skorin Kapov ve O'Kelly 1994, Model 3: M. E. O'Kelly, D. Brayn, D. Skorin Kapov ve J. Skorin Kapov 1996, Model 4: A. T.Ernst ve M. Krishnamoorthy 1996 ve Model 5: N. Boland, M. Krishnamoorthy, A. T. Ernst ve J. Ebery 2002.

Modellerde kullanılan parametreler: (Model 1-Model 5)

W_{ij} = *i* noktasından *j* noktasına olan akış miktarı

α = ADÜler arası büyük oranlardaki taşımalardan kaynaklanan küçültücü faktör ($0 < \alpha \leq 1$)

c_{ij} = *i* noktasından *j* noktasına taşımanın birim başına maliyeti $C_{ijkm} = c_{ik} + c_{mj} + \alpha c_{km}$.

Model 1, Model2, Model3'te kullanılan değişkenler

X_{ijkm} = *i* noktasından *j* noktasına gitmekte olan akışın *k* ve *m* merkez üsslerini kullanım oranı

Y_k = 1 eğer k noktası merkezse 0 diğer durum (dd).

Model 1 (Campbell 1991)

$$\text{En küçük } Z = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m W_{ij} X_{ijkm} C_{ijkm}$$

$$\text{S.t} \sum_k \sum_m X_{ijkm} = 1 \ \forall\, i,j \quad (1) \qquad \sum_k Y_k = p \quad (2)$$

$$0 \leq X_{ijkm} \leq Y_k \quad \forall\, i,j,k,m \quad (3) \qquad 0 \leq X_{ijkm} \leq Y_m \quad \forall\, i,j,k,m \quad (4) \qquad Y_k \in \{0,1\} \ \forall\, k \quad (5)$$

Bütün modellerde amaç fonksiyonu, toplam maliyeti en aza indirmektir. Birinci kısıt (1), her arz talep ikilisi için akışların ADÜ tarafından yapılmasını garanti etmektedir. İkinci kısıt (2), *p* tane merkez açılmasını sağlamaktadır. Üçüncü (3) ve dördüncü (4) kısıtlar akışların merkez noktalarından yapılmalarını garantilemektedir. Beşinci kısıt (5) bir noktanın ADÜ merkezi olup olmadığına karar verir.

Model 2'de (3) ve (4) numaralı kısıtlar (6), (7) ve (8) numaralı kısıtlarla değiştirilmiştir ve kısıt sayısı $2n^3(n-1)$ kadar azalmıştır.

$$\sum_m X_{ijkm} \leq Y_k \text{ for all } i,j,k, \quad (6) \qquad \sum_k X_{ijkm} \leq Y_m \text{ for all } i,j,m, \quad (7)$$

$$X_{ijkm} \geq 0 \text{ for all } i,j,k,m. \quad (8)$$

Daha sonra, M. E. O'Kelly, D. Brayn, D. Skorin Kapov ve J. Skorin Kapov Model 2 üzerinde birtakım değişiklikler önermişlerdir. Önerilen değişiklikler aslında seçilmeyecek atamaların hiç tanımlanmayarak ana modelin küçültülmesine dayanmaktadır. Seçilmeyecek atamaların tanımlanmaması toplama aralığını kısarak yapılmaktadır. S'in tanımı $S = \{(i,j,k,m): (j>i) \wedge [(k=i) \vee (k\neq i \wedge k=m=j) \vee (k\neq i \wedge k\neq j \wedge m\neq i)]\}$ şeklinde yapılmıştır. $S_{ij} \subset S$ anlamı i ve j değerlerinin sabitlenmesidir. Yeni model:

Model 3 (M. E. O'Kelly, D. Brayn, D. Skorin Kapov ve J. Skorin Kapov 1996)
En küçük (toplam maliyet)
s.t (2), (5), (8)

$$\sum_{k,m\in S_{ij}} X_{ijkm} = 1 \quad \forall\ j>i \quad (1^*) \qquad \sum_{m\in S_{ijk}} X_{ijkm} - Y_k \le 0 \quad \forall\ j>i;k \quad (6^*) \qquad \sum_{k\in S_{ijm}} X_{ijkm} - Y_m \le 0 \ \forall\ j>i;m \quad (7^*)$$

Ernst ve Krishnamoorthy diğer üç modelden farklı yeni bir model geliştirmişlerdir. Modeldeki asıl değişiklik değişkenlerin dört yerine üç indeksli olmasıdır. Bu modellerde akışların oranı değil gerçek değerleri verilmektedir. Model 4 ve Model 5'in değişkenleri aşağıdaki gibidir.

Y^i_{kl} = *i* noktasından çıkan, merkez üsleri *k* ve *l* noktalarını kullanan toplam akış miktarı
Z_{ik} = *i* noktasından *k* merkezine olan akış miktarı
X^i_{lj} = *i* noktasından çıkmış olup merkez *l*'yi kullanarak *j* noktasına ulaşan akış miktarı

Model 4 (Ernst and Krishnamoorthy)

$$\text{En küçük} \sum_i \left[\sum_k d_{ik} Z_{ik} + \sum_k \sum_l \alpha d_{kl} Y^i_{kl} + \sum_l \sum_j d_{lj} X^i_{lj} \right]$$

S.t. (2), (5)

$$\sum_k Z_{ik} = \sum_j W_{ij} \quad \forall\ i \in N \qquad (9) \qquad \sum_l X^i_{lj} = W_{ij} \quad \forall\ i\ j \in N \quad (10)$$

$$\sum_l Y^i_{kl} + \sum_j X^i_{kj} - \sum_l Y^i_{lk} - Z_{ik} = 0 \quad \forall\ i,k \in N \quad (11)$$

$$Z_{ik} \le \sum_j W_{ij} H_k \quad \forall\ i,k \in N \quad (12) \quad X^i_{lj} \le W_{ij} H_l \quad \forall\ i\ j,l \in N \quad (13) \quad X^i_{lj},\ Y^i_{kl},\ Z_{ik} \ge 0 \quad \forall\ i\ j,k,l \in N$$

(14)

(9) (10) ve (11)'inci kısıtlar akış dengeleme denklemleridir. (12)'ınci kısıt merkez üssü olmayan noktaların akışları toplayamayacağını, (13)'üncü kısıt ise merkez üssü olmayan noktaların akışları dağıtamayacağını temin etmektedir.

2002 yılında Boland, Krishnamoorthy, Ernst ve Ebery Model4'e iki yeni kısıt ((15), (16)) eklemiş ve (13)'üncü kısıtı toplayarak yeni bir model önermişlerdir. Yeni kısıtlar aşağıdaki gibidir:

$$Z_{hh} = O_h H_h \quad \forall h \in N \quad (15) \qquad X^i_{hh} = W_{ih} H_h \quad \forall i,h \in N \quad (16)$$

$$\sum_i X^i_{lj} \le \sum_i W_{ij} H_l \quad \forall\ j,l,\ j \ne l \quad (13^*)$$

(15)'inci kısıt bir merkezin diğer bir merkezden çıkan akışı toplamayacağını sağlarken, (16) sonuçta bir merkezde biten akışın diğer başka bir merkez tarafından dağıtılmayacağını sağlamaktadır. Çalışmamız sırasında Model 4'teki (13*) kısıtı yerine (13)'ü kullanmanın daha iyi sonuçlar verdiğini gördük. Ve bu modele Model5a adını verdik.

Model 5a
En küçük (toplam maliyet)
S.t.,
(2),(5),(9),(10),(11),(12),(14),(15),(16)

$$X^i_{lj} \le W_{ij} H_l \quad \forall\ i,j,l,\ j \ne l \quad (13)$$

2. Sayısal Karşılaştırma

Çalışmamızda literatürdeki modellerin sayısal analizini ve karşılaştırılmasını CAB verisi ve Türkiye ulaşım ağı verilerini kullanarak göstermiş oldukları performanslara göre yaptık. CAB verisi ABD'deki 25 şehrin birbiriyle olan uzaklığı ve 1970 yılındaki akış miktarlarıdır. Bu verinin 10,15,20,25 şehir kümeleri kullanılarak sayısal analizler yapılabilir. Biz de analizlerimizde bu dört farklı n değerini, p = 2,3,4 ve α={0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1} değerlerini kullanarak yaptık. Aşağıdaki tabloda CPLEX programı kullanılarak her bir model için değişik kombinasyonlar sonucu bulunan CPU zamanlarını bulabilirsiniz. Koyu renk ile yazılmış değerler o sütundaki en iyi CPU zamanını göstermektedir.

Tablodan da görülebileceği gibi n=10 için Model 1 dışındaki modeller birbirine yakın sonuçlar vermiştir. Model 1'in n=15'teki performansından sonra n=20 ve n=25 değerleri incelenmemiştir. Büyük n değerleri için Model3 en iyi sonuçları vermiştir.Ancak Model4 ve Model5a da yakın sonuçlar vermiştir. Aslında Model4'ün değiştirilmesi ile oluşturulan Model5 tablodan da görüleceği gibi kötü performans göstermektedir. Bizim önerdiğimiz değişiklikle yaratılan Model5a çok daha iyi sonuçlar vermektedir.

Tablo 1 : CAB veri tabanına göre karşılaştırma

N=10	p=2	p=3	p=4	n=15	p=2	p=3	p=4
M1	104,148	93,268	82,36	M1	5478,71	5515,182	4226,278
M2	0,998	0,934	0,802	M2	5,644	5,53	5,11
M3	**0,29**	0,3	**0,28**	M3	**1,854**	**1,832**	**1,77**
M4	0,3	**0,29**	0,34	M4	3,19	3,272	3,66
M5	0,794	0,524	0,586	M5	12,488	11,18	7,416
M5a	0,39	0,466	0,43	M5a	3,362	4,338	4,934
N=20	p=2	p=3	p=4	n=25	p=2	p=3	p=4
M1	-	-	-	M1	-	-	-
M2	30,178	21,908	22,318	M2	102,542	139,294	66,526
M3	**8,536**	**7,24**	**7,044**	M3	**28,606**	**37,546**	**20,624**
M4	12,888	17,138	17,944	M4	98,114	90,618	108,376
M5	164,788	77,068	48,05	M5	1009,292	331,45	159,736
M5a	12,518	16,558	22,188	M5a	82,448	77,33	92,358

Daha sonra bütün modellerin doğrusal proglamlama gevşetmelerini n=25, p=4 değerleri için inceledik. Oransal fark GAP=(IP-LP)/IP)*100 şeklinde tanımlarsak Tablo2'deki değerler bulunmuştur.

Tablo 2 : Oransal Farkların karşılaştırılması.

GAP=(IP-LP)/IP)*100			M2	M3	M4	M5	M5a
N=25	p=4	GAP	0%	0%	0,25%	4,50%	0,15%

Tablodan da görülebileceği gibi Model 2 ve Model 3 oransal fark analizinde iyi performans göstermişlerdir. Onları Model 5a takip etmektedir.CPU zamanlarını ve doğrusal proglama gevşetmesi sonuçlarını dikkate alarak bir özet tablo oluşturabiliriz.

Tablo 3 : Genel Değerlendirme

Modeller	M1	M2	M3	M4	M5	M5a
CPU zamanı	Kötü	*iyi*	*çok iyi*	*çok iyi*	Kötü	*çok iyi*
GAP	Kötü	*çok iyi*	*çok iyi*	*İyi*	Kötü	*iyi*

Bu tablodan Model3 çoklu-atama modelleri içinde en iyi model olarak görülebilir. Ancak unutmamak gerekir ki bu sonuçlar CAB verisindeki performanslardan elde edilmiştir. Daha büyük *n* değerlerindeki performanslarının da incelenmesi için 81 düğümlü Türkiye ağından yararlandık. CAB verisi ile iyi sonuç veren Model2, Model3, Model4 ve Model5a'yı inceledik.

CAB veri tabanına göre, tablo 3'ten de anlaşılacağı gibi, Model 3 küçük *n* değerleri için en iyi sonucu vermiştir. Ancak bu modelde n^4 mertebesinde {0,1} değişkeni olduğundan büyük *n* değerleri için problem boyutu büyümüş ve CPLEX problemi kabul edilebilir zamanda okuyamamıştır.Ancak Model 4 ve Model 5a CPLEX tarafından sırasıyla 57 ve 55 saniye içinde okunmuş ve yine sırasıyla 30 ve 15 saat içinde çözüme ulaştırılmıştır. 15 saat uzun bir zaman dilimi gibi görünse stratejik kararlar için kabul edilebilir bir seviyededir.

Özetleyecek olursak bu çalışmada literatürdeki bütün çoklu-atama modellerini birbirleriyle karşılaştırdık. Küçük *n* değerleri için Model 3 (M. E. O'Kelly, D. Brayn, D. Skorin Kapov ve J. Skorin Kapov 1996) en iyi performansı gösterdi. Ancak *n* büyüdüğünde bu model yetersiz kaldır. Bizim N. Boland vd.'nin modeli üzerinde küçük bir değişiklik ile yaptığımız Model5a büyük *n* değerleri için en iyi performansı gösterdi.

Kaynaklar

Campbell, J.F. (1996) *Hub location and the p-hub median problem*, *OR*, Vol.44, No.6, pp. 923-935.

N. Boland, M. Krishnamoorthy, A. T. Ernst ve J. Ebery *Preprocessing and cutting for multiple allocation hub location problems EJOR,* 2002

A.T. Ernst ,M. Krishnamoorthy, *Exact and Heuristic Algorithms for the Uncapacitated Multiple Allocation p-hub Median Problem, EJOR*, 1996

M. E. O'Kelly, D. Brayn, D. Skorin Kapov ve J. Skorin Kapov *Hub network design with single and multiple allocation: A computational study, Location Science*, Vol.4, pp. 125-138,(1996)

Skorin-Kapov, J. Skorin-Kapov, M.E. O'Kelly, *Tight linear programming relaxations of uncapacitated p-hub median problems,* European Journal of Operational Research, 94(3), 582-593.