0-1 SIRT ÇANTASI PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNDE GENİŞLETİLMİŞ SUBGRADİENT YÖNTEMİNİN KULLANIMI

Tuğba Saraç, Aydın Sipahioğlu
Osmangazi Üniversitesi, Endüstri Mühendisliği Bölümü, Bademlik, Eskişehir

Özet: 0-1 Sırt çantası problemi (SÇP-*Knapsack problem*), üzerinde en çok çalışılmış tamsayılı problemlerden birisidir. 50'li yıllardan günümüze değin, çözülebilen problem boyutlarının artmasını ve çözüm süresinin azalmasını sağlayan pek çok gelişme kaydedilmiştir. Ancak halen zor SÇP için makul sürelerde çözüm verebilecek algoritmalara gereksinim duyulmaktadır. SÇP kısıtları ve amaç fonksiyonu doğrusal olmasına rağmen, karar değişkeninin kesikli olması nedeniyle dışbükey değildir. Bu kapsamda problemin çözümünde kullanılabilecek bir yöntem de Gasimov tarafından önerilmiş olan Genişletilmiş Subgradient Yöntemidir (GSY). Bu çalışmada SÇP, GSY kullanılarak çözülmüş ve uygulamanın başarılı ve zayıf yönleri tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: *Sırt Çantası Problemleri, Genişletilmiş Subgradient Yöntemi, Tamsayılı Programlama*

USING THE MODIFIED SUBGRADIENT ALGORITHM TO SOLVE 0-1 KNAPSACK PROBLEMS

Abstract: 0-1 Knapsack problem (KP) is the most intensively studied integer programming problems. From the fifties to nowadays, many developments have occurred. Solvable problem size has increased and solution time has decreased. However, new algorithms, which can solve the hard KP in reasonable time, are still required. Although the KP has linear constraints and object function, since the decision variables are discrete, it is not convex. In this scope, one of the solution methods, which can be used to solve our problem, is Modified Subgradient Method (MSM) proposed by Gasimov. In this study, KP is solved by using MSM and advantages and disadvantages of applying MSM to KP are discussed.

Keywords: *Knapsack Problem, Modified Subgradient Algorithm, Integer Programming*

1. Giriş

SÇP üzerinde en çok çalışılmış sırt çantası problemlerinden birisidir ve matematiksel modeli aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$\text{(SÇP)} \qquad \underset{x}{enb}\left\{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \le c, x \in [0,1]^n\right\}$$

SÇP'de seçim yapılacak n farklı parça söz konusudur. Her parçanın ağırlığı (w_i) ve karı (p_i) vardır. Problemin amacı toplam ağırlıkları kapasiteyi (c) aşmayacak ve en fazla kazancı sağlayacak parçalardan hangilerinin seçilmesi gerektiğini belirlemektir.

Tamsayılı programlama konularını ele alan kitapların pek çoğunda SÇP'ne yer verilmektedir. Bunların yanı sıra Martello ve Toth (1990), ve Kellerer ve diğerlerinin (2004) SÇP tipleri ve çözüm algoritmaları konulu kitaplarından konuyla ilgili ayrıntılı bilgilere erişmek mümkündür. Toth (2000), kombinatorik problemlerin kesin çözüm yöntemleri konulu yayın taramasında SÇP'yi incelemiştir. Martello ve diğerleri (2000) SÇP'nin çözümünde kullanılan güncel teknikleri ele almışlardır. Bretthauer ve Shetty (2002), doğrusal olmayan SÇP çözüm yöntemlerini ve uygulamalarını incelemiş, Freville (2003) çok boyutlu SÇP konusunda tarama yapmıştır. Bu yakın tarihli yayın taramaları ve kitaplar aynı zamanda SÇP'nin güncel bir problem olduğunun da göstergeleridir.

SÇP için ilk kesin çözüm algoritması 1950'li yıllarda Bellman tarafından dinamik programlama ile geliştirilmiştir. 1957 yılında Dantzing, LP gevşetme ve z için önerdiği üst sınır ile bu tip problemlerin çözümüne çok önemli bir katkıda bulunmuştur. İzleyen yirmi yıl boyunca SÇP üzerine yapılan çalışmaların hemen hepsinde bu yaklaşım temel alınmıştır. 60'lı yıllarda Gilmore ve Gomory SÇP'nin çözümünde dinamik programlama yaklaşımını kullanmış, 1967 yılında Kolesar, ilk kez dal-sınır algoritmasını kullanmıştır. 70'li yıllarda dal-sınır algoritması temelli yaklaşımlar oldukça geliştirilmiş ve çok sayıda değişkeni olan modellerin çözümünde etkin bir şekilde kullanılmışlardır. En iyi bilinen dal-sınır algoritması Horowitz ve Sahni tarafından geliştirilmiştir. 1973 yılında Ingargiola ve Korsh değişken sayısının önemli ölçüde azaltılmasına olanak tanıyan ilk indirgeme prosedürünü kullanmıştır. 80'li yıllarda büyük boyutlu problemlerin çözümü üzerine yoğunlaşılmış, değişkenlerin etkin bir şekilde sıralanması, algoritmaların hızlarının artmasını sağlamıştır (Martello ve Toth, 1990). 80'li yıllardan günümüze değin çözülebilen problem boyutlarının artmasını ve çözüm süresinin azalmasını sağlayan pek çok gelişme kaydedilmiştir. Günümüzde 100.000 değişkene sahip kolay (w ve p parametreleri arasında korelasyon olmayan) SÇP'nin en iyi çözümü birkaç dakika içinde elde edilebilirken, zor (w ve p parametreleri arasında güçlü korelasyon olan) SÇP için çok daha küçük boyutlu problemleri makul sürelerde çözecek algoritmalara gereksinim duyulmaktadır.

2. Genişletilmiş Lagrange Fonksiyonu Temelli Subgradient Yöntemi

0-1 tamsayılı modeller, sürekli yapıya dönüştürülebilir ve Subgradient yöntemler kullanılarak çözülebilir ancak Subgradient yöntemler, modelin en iyi çözümünü bulamayıp bir yerel en iyi noktasında takılabilmektedir. 2002 yılında Gasimov tarafından yapılan çalışmalarla genişletilmiş Lagrange fonksiyonu kullanan Subgradient Yöntemi (GSY) geliştirilmiştir. Yöntemin temel avantajı, çözüm sürecinin yakınsak olduğunun ispatlanmış olması, yani daima eldekinden daha iyi bir çözümün bulunacağıdır. Ayrıca diğer Lagrange fonksiyonlarından farklı olarak, çözümü koniler aracılığıyla taramakta ve böylece sıfır ikil aralığın elde edilmesini yani en iyi çözümün bulunabilmesini sağlamaktadır. Sürekli problem üzerine herhangi bir dışbükeylik veya türevlenebilirlik şartı olmaması da yöntemin önemli bir avantajıdır.

Yeni olması nedeniyle yöntemin, henüz bütün doğrusal olmayan modellerin en iyi çözümünün bulunacağı söylenememektedir. Teorik olarak bu mümkün görünmekle birlikte, yöntemin geliştirilmeye gerek duyulan noktaları bulunmaktadır ve bazı problem türlerinde başarılı olamadığı da gözlenmiştir. Özellikle yöntemin başlangıç noktalarına olan duyarlılığı, çözüm bulunmasında sürenin uzamasına veya bazı problemlerde çözüm bulunamamasına yol açmaktadır. Öte yandan aynı yöntemin kareli atama probleminde uygulanmasıyla büyük başarılar da elde edilmiştir. Örneğin Eschermann ve Wunderlich tarafından verilmiş olan Esc 32e isimli KAP probleminin en iyi çözümü, dal-sınır algoritması kullanılarak ve 32 işlemcinin paralel çalıştırılmasıyla 10 dakikada bulunabilirken, GSY ile PIII işlemcili bir bilgisayarda 40 saniyede bulunmuştur (Sipahioğlu ve diğerleri, 2003).

Bu çalışmada genişletilmiş Lagrange fonksiyonu yardımıyla SÇP'nin sıfır ikil aralık ile genişletilmiş Lagrange ikil problemi kurulmuş ve küçük bir örnek problem üzerinde GSY uygulanmıştır. Çözüm sürecinin ilk adımı Modeldeki 0-1 tamsayı değişkenlerinin sürekli hale getirilmesidir. 0-1 değişkenlerin sürekli hale getirilmesinde Li (1992) tarafından verilen teoremden faydalanılmıştır ve SÇP izleyen şekilde doğrusal olmayan sürekli probleme çevrilmiştir. Ayrıca *s* aylak değişkeni eklenerek eşitsizlik kısıtı eşitlik haline, amaç fonksiyonu -1 ile çarpılarak enbüyükleme problemi enküçükleme problemine dönüştürülmüştür. Bu aşamalardan sonra elde edilen SSÇP'ye bir sonraki aşamada GSY uygulanacaktır.

$$\text{(SSÇP)} \quad \underset{x}{enk}\left\{-\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \middle| \sum_{i=1}^{n} w_i x_i + s = c, \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^2) = 0, x \in [0,1]^n\right\}$$

GSY'nin Adımları:

(P) $h(x) = 0$

k.a.

$\text{Inf } P = \inf_{x \in S} f(x)$

Buna göre algoritma adımları şöyle verilebilir:

Başlangıç Adım: $c_1 \geq 0$ olacak şekilde (u_1, c_1) vektörünü seç. k = 1 al ve ***Temel Adıma*** geç.

Temel Adım:

A1. Verilmiş (u_k, c_k) için izleyen alt problemi çöz:

(P*) $x \in S$ k.a. $\text{Enk } f(x) + c_k \|h(x)\| - \langle h(x), u_k \rangle$

x_k , alt problemin çözümü olsun. Eğer $h(x_k) = 0$ ise ***dur***. (u_k, c_k) , P* probleminin x_k ise P probleminin çözümdür. Değilse ***A2***'ye git.

A2. s_k ve ε_k pozitif sabit adım uzunlukları olmak üzere

$u_{k+1} = u_k - s_k\, g(x_k)$, $c_{k+1} = c_k + (s_k + \varepsilon_k)\|h(x_k)\|$, k = k + 1 al ve ***A1***'e dön.

s_k ve ε_k izleyen aralıkta olmalıdır. $0 < \varepsilon_k < s_k$, $0 < s_k < \dfrac{2(H(\bar{u},\bar{c}) - H(u_k,c_k))}{5\|g(x_k)\|^2}$.

3. Hesapsal Sonuçlar

GSY'nin SÇPnin çözümünde kullanılabileceği n=7, w_i=(40,50,30,10,10,40,30), c=100, p_i=(40,80,10,10,4,20,60) olan küçük bir örnek üzerinde gösterilmiştir. SÇP, GAMS/CPLEX ile çözülerek 0.10sn.'de z^*=154, x_i^*=(0,1,0,1,1,0,1) eniyi çözümü elde edilmiştir. SSÇP, aynı özelliklere sahip bir bilgisayarda GAMS/CONOPT ile çözülmüş, 2 adımda ve toplam 0.36sn.de aynı çözüm elde edilmiştir. Çözüm sonuçları Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1: SSÇP'nin GSY ile elde edilen çözüm sonuçları

ardıştırma	*süre(sn)*	*f (x)*	*c*	u_1	u_2	*norm*	*i (xi=1)*
1.00	0.02	224.00	0.00	0.00	0.00	110.00	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
2.00	0.34	154.00	2.90	-1.49	0.00	0.00	2, 4, 5, 7

4. Sonuç ve Öneriler

Yöntemin önündeki zorluklar, daha çok GSY'nin temel adımındaki kısıtsız problemin çözümünde kullanılan tekniklerin yerel en iyi noktalara takılmasından kaynaklanmaktadır. Diğer bir zorluk da, adım uzunluğu hesabında verilen üst sınırın belirlenmesiyle ilgilidir. Şu haliyle GSY'nin, SÇP'nin çözümünde mevcut algoritmalara rakip olabileceğini söylemek için erkendir. Ancak doğrusal olmayan kısıtsız problemlerin çözüm yöntemlerindeki gelişmelere bağlı olarak gelecekte çok daha başarılı sonuçların elde edilebileceği açıktır. Özellikle kareli sırt çantası problemi gibi zaten doğrusal olmayan yapıdaki sırt çantası problemleri için bu yöntemle çok daha başarılı sonuçlara ulaşılabileceği görünmektedir. Ve yine GSY'nin diğer problem tiplerindeki başarılı sonuçları da göz önünde bulundurulduğunda, yöntemin tamsayılı problemlerin çözümünde yeni bir ufuk açtığını söylemek yanlış olmayacaktır.

Kaynaklar

Bretthauer, K.M., Shetty, B., The nonlinear knapsack problem – algorithms and applications, *European Journal of Operational Research* 138, 459-472, 2002.

Freville, A., The multidimensional 0-1 knapsack problem: An overview, *European Journal of Operational Research*, (basımda),2003.

Gasimov, R., Augmented Lagrangian duality and nondifferantiable optimization methods in nonconvex programming, *Journal of Global Optimization*, 24, 187-203, 2002.

Li, H.L., An approximate method for local optima for nonlinear mixed integer programming problems, *Computers and Operations Research*, 19(5), 435-444, 1992.

Kellerer, H., Pferschy, U., Pisinger, D., *Knapsack Problems*, Springer-Verlag, NY, 2004.

Martello, S., Psinger, D., Toth, P., New trends in exact algorithms for the 0-1 knapsack problem, *European Journal of Operational Research* 123, 325-332, 2000.

Martello, S., Toth, P., *Knapsack Problems: algorithms and computer implementations*, Wiley, Chichester, UK, 1990.

Sipahioğlu A., Gasimov R., Saraç T., Üstün Ö., **Öztürk G.**, Bazı Np-Zor Problemler İçin Genişletilmiş Lagrange Fonksiyonları Kullanılarak Yeni Bir Çözüm Yönteminin Geliştirilmesi, *Bilimsel Araştırma Projesi*, 30 sayfa, Osmangazi Üniv. Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu, 2003.

Toth, P., Optimization engineering techniques for the exact solution of NP-hard combinatorial optimization problems, *European Journal of Operational Research* 125, 222-238, 2000.