GEZGİN SATICI PROBLEMİ İÇİN DOĞRUSAL OLMAYAN BİR MATEMATİKSEL MODEL VE ÇÖZÜM YAKLAŞIMI

Aydın Sipahioğlu, Tuğba Saraç, Gürkan Öztürk
Osmangazi Üniversitesi, Endüstri Mühendisliği Bölümü, 26030, Eskişehir

Özet: Gezgin satıcı problemi (GSP–Traveling Salesman Problem), bir noktadan başlayıp serimdeki bütün düğümlere yalnız bir kez uğrayan ve geri dönen gezginin izleyeceği turun belirlenmesi problemidir. GSP için çok sayıda kesin çözüm veren yöntem ve matematiksel model önerilmiştir. Ancak buradaki temel sorun, alt turların oluşumunu engellemektir. Alt tur engelleme kısıtları çoğu kez problemin kısıtlarının artmasına ve çözüm süresinin uzamasına neden olmaktadır. Bu çalışmada GSP için alt turların engellenmesinde yeni bir bakış açısı sunan, doğrusal olmayan bir matematiksel model önerilmiştir. Model, tamsayılı doğrusal olmayan ve sürekli doğrusal olmayan biçimlerde tanımlanarak birkaç test probleminde denenmiş ve çözümler türetilmiştir. Ayrıca Gasimov tarafından geliştirilen genişletilmiş subgradient algoritması kullanılarak da çözümler araştırılmış, elde edilen sonuçlar doğrusal modelin çözümleriyle karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: *Gezgin Satıcı Problemi, Doğrusal Olmayan Programlama, Genişletilmiş Subgradient Algoritması*

A NONLINEAR MATHEMATICAL MODEL AND SOLUTION APPROACH FOR TRAVELING SALESMAN PROBLEM

Abstract: Traveling Salesman Problem (TSP) is the problem of determining the shortest tour visiting all cities exactly once and returning to the starting point. There are a lot of exact solution methods and mathematical models for TSP. However, the basic problem of TSP is preventing the sub tours. Sub tour breaking constraints usually cause to increase the number of constraints of the model and cause to increase solution time. In this study, we proposed a new nonlinear mathematical model for TSP and we present a new point of view to sub tour breaking. TSP is modeled both nonlinear integer and nonlinear continuous form. These models have tested using some solved test problems. Furthermore, we also solve the continuous nonlinear model by using Modified Subgradient Algorithm proposed by Gasimov and achieved solutions compared with the linear model solutions.

Keywords: *Traveling Salesman Problem, Nonlinear Programming, Modified Subgradient Algorithm*

1. Giriş

Gezgin Satıcı Problemi (GSP), bir başlangıç noktasından yola çıkarak serimdeki bütün düğümlere yalnız bir kere uğrayıp aynı noktaya geri dönmesi istenen bir gezginin, izlemesi gereken en kısa yolun belirlenmesi problemidir (Laporte, 1992). Çoklu gezgin satıcı problemi (m-TSP), araç turu belirleme problemi (VRP) ve bunlardan türeyen diğer pek çok problemin daha temelini oluşturur. GSP'de düğümler uğranacak yerleri, ayrıtlarsa yolları simgeler. Düğümler arasındaki geçiş değerlerini gösteren matrise, uzaklık matrisi denir. Bu matris simetrik veya asimetrik; tam bağlı (Serimdeki bütün düğümler arasında geçiş olması hali) veya seyrek olabilir.

GSP ilk olarak 1954'de Dantzig, Fulkerson ve Johnson tarafından incelenmiş ve çözümü için ilgili tanımlarıyla beraber aşağıda verilen model önerilmiştir.

n: Serimdeki düğüm (müşteri) sayısı, $N=\{1,2, ... ,n\}$ düğümler kümesi olmak üzere,
x_{ij}: i. düğümden j. düğüme geçişi olması hali, (1 ise geçiş var, 0 ise yok);
d_{ij}: (i-j) düğümleri arasındaki mesafe, $\overline{X}$: Probleme ait bir uygun çözüm (Başlangıçtan bitişe giden bir uygun tur),
X: Bütün uygun çözümlerin (turların) olduğu küme, olarak tanımlanır. Buna göre;

$$\text{(GSP)} \qquad \underset{x\in X}{\text{enk}} \left\{ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}\ x_{ij} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ \overline{X} \in X, \forall\ i,j \in N \right\}$$

Serimde 1 numaralı düğüm, gezginin yola çıkacağı ve sonuçta geri döneceği merkez düğümü gösterir. Bu modelde kapalı biçimde verilen uygun turun bulunması ifadesi, aslında GSP'nin çözümündeki en zorlu kısımdır. Çünkü alt turların oluşumunu etkin biçimde önleyecek kısıtların yazılması gerekir. Alt turların engellenmesindeki en önemli katkı, 1960 yılında Miller, Tucker ve Zemlin tarafından, polinom sayıda artış gerektiren alt tur engelleme kısıtlarının yazılmasıyla yapılmıştır. 1991 yılında da Desrochers ve Laporte tarafından daha sıkı alt tur engelleme kısıtları geliştirilmiştir. İzleyen yıllarda konuyla ilgili başka çalışmalar da yapılmıştır (Sipahioğlu, 1996). GSP için kareli atama problemi formülasyonuna benzetilerek doğrusal olmayan karar modeli de önerilmiştir (Rardin, 1998). Ancak bu modelin etkin olduğu söylenemez. Günümüzde 15.112 şehirli GSP'nin eniyi çözümü bulunmuştur (Applegate, 2001). Ama bu sonuç, toplam 22,6 yıla eşit bilgisayar zamanı kullanılarak elde edilebilmiştir. Kısacası günümüzde GSP'ye olan ilgi devam etmekte ve GSP'nin en iyi çözümünü makul sürelerde bulacak yöntemlere olan gereksinim sürmektedir.

Bu çalışmada, uzaklık matrisi için herhangi bir koşul bulunmayan GSP için, tamsayı değişkenler ve doğrusal olmayan kısıtlardan oluşan yeni bir model sunulmaktadır. Modelin yeniliği, alt turların engellenmesini serimdeki düğüm sayısı kadar kısıt kullanarak başarmasıdır. Ancak kullanılan kısıtlar doğrusal olmayan yapıdadır. Çalışmada geliştirilen model öncelikle tamsayılı-doğrusal olmayan biçimde, daha sonra tamsayı değişkenlerin sürekli hale getirilmesiyle sürekli-doğrusal olmayan biçimde tanımlanmıştır. Ayrıca Gasimov tarafından önerilen genişletilmiş subgradient algoritması (GSA) kullanılarak önerilen sürekli doğrusal olmayan modelin GSA ile gösterdiği performans incelenmiş, karşılaşılan sorunlar, elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

2. Geliştirilen Tamsayılı-Doğrusal Olmayan GSP Modeli

Geliştirilen yaklaşımda temel amaç, alt turların daha az sayıda ve etkin kısıtlarla engellenmeye çalışılmasıdır. Bu amaçla merkez düğüm ile ona komşu olan düğümlerin arasındaki ilişkiler ve diğer düğümlerin birbirleri arasındaki ilişkiler ayrı ayrı incelenmiştir.
R: Ara düğümler kümesi; $R=N\backslash\{1\} = \{2, 3, ... ,n\}$; S_i: i. düğüme komşu düğümlerin oluşturduğu küme, y_i: i. düğüme uğranma sırasını (durak numarasını) gösteren değişken, olmak üzere geliştirilen yaklaşım şöyle açıklanabilir:

GSP'de bir düğüme yalnız 1 giriş ve yalnız 1 çıkış olacağı için herhangi bir ara düğümün durak numarası ile kendisine geçiş yapılan düğümün durak numaraları arasındaki fark 1 olmak zorundadır.

$$\sum_{j=1}^{n} y_h.x_{hj} - \sum_{i=1}^{n} y_i.x_{ih} = 1, \quad \forall h \in R,\ \ h \neq j,\ h \neq i \qquad (1)$$

Merkez düğüm için de sadece bir giriş ve çıkış söz konusudur. Ancak gezgin merkezden çıkış yaparken $y_1=1$ iken, merkeze dönerken $y_j=n$'dir. ($j \in S_1$). Bu nedenle merkez düğümle komşuları arasındaki durak numaraları arasındaki farkın n-1 olması gerekir.

$$\sum_{i=2}^{n} y_i.x_{i1} - \sum_{j=2}^{n} y_1.x_{1j} = n-1 \qquad i,j\ \in R \qquad (2)$$

(1) ve (2) numaralı kısıtlar, alt turların engellenmesinde yeterlidir, fakat doğrusal olmayan yapıdadır ve üstelik 0-1 tamsayı biçiminde değişkenler vardır. Öte yandan y_j değişkenlerini tamsayı olarak tanımlanmasına gerek yoktur. Bu kısıtların biraz daha sadeleştirilerek yazılması da mümkündür. Modelin çözümüne geçmeden önce merkez düğümünün durak numarasının 1 olduğuna dair kısıtın da (y1=1) modele eklenmesi gerekir.

Bu tanımlar ışığında yeni tamsayılı doğrusal olmayan GSP modeli (M1), DFJ tarafından önerilen modele (1) ve (2) numaralı alt tur engelleme kısıtları ile y1=1 kısıtının eklenmesiyle elde edilir.

3. Geliştirilen Sürekli-Doğrusal Olmayan GSP Modeli

Tamsayılı-doğrusal olmayan GSP modeli, çözümü zor bir problemdir. Ancak doğrusal olmayan yapıya razı olduktan sonra, 0-1 tamsayılı bir modeli sürekli modele çevirmek mümkündür. Li (1992) tarafından yapılan çalışmayla, 0-1 tamsayılı değişkenlerin nasıl sürekli değişken biçimine dönüştürülebileceği gösterilmiştir. Li'ye göre; modele eklenmesi gereken kısıtlar şunlardır:

$$0 \le x_{ij} \le 1 \quad \forall i,j \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - x_{ij}^2) = 0 \qquad (4)$$

(3) numaralı kısıt değişkenler için üst sınır niteliğindedir. Dönüşümü sağlayan (4) numaralı kısıttır. Bu ifadelerden yararlanarak sürekli-doğrusal olamayan GSP modeli (M2) hemen tanımlanabilir. Buna göre M2, M1 modeline (3) ve (4) numaralı kısıtların eklenmesiyle oluşur. Modeldeki bütün değişkenler sürekli değişkendir.

4. Genişletilmiş Subgradient Algoritması ile GSP

Gasimov (2002) tarafından önerilmiş olan genişletilmiş subgradient algoritması (GSA), genişletilmiş Lagrange fonksiyonuna dayalı subgradient yöntemidir. Yaklaşımın önceki Lagrange yöntemlerine göre getirdiği en büyük yenilik, asıl ve ikil problemlerin çözümleri arasında ikil aralık oluşmasını önlemesi ve ceza parametresi içermemesidir. Ayrıca yöntemde ikil fonksiyonun değerinin verilen subgradientler boyunca kesin artan olduğu ispatlanmıştır. Bütün bunlar GSA ile eğer uygun bir başlangıç noktasından yola çıkılırsa, problemin en iyi çözümünün bulunabileceği anlamına gelmektedir.

Sürekli GSP modelindeki eşitlik kısıtları h(x) ile gösterildiğinde, genişletilmiş Lagrange ikil fonksiyonu izleyen şekilde verilebilir:

$$L(x,v,c) = f(x) + c\left[\sum_{i=1}^{m}(h_i(x))^2\right]^{\frac{1}{2}} - \langle v, h(x)\rangle \qquad (5)$$

Bu çalışmada M2 modeli, (5) numaralı ifade ile tanımlanan, genişletilmiş Lagrange ikil fonksiyonu temeline dayanan GSA kullanılarak çözülmüştür.

5. Hesapsal Sonuçlar

Önerilen modeller 5 ve 10 boyutundaki iki küçük problem ile sınanmıştır. Tablo 1'de beş boyutundaki problem için GSA ile elde edilen sonuçlar verilmiştir. Bu sonuçlar GAMS/CONOPT ile 0.978 saniyede bulunmuştur. M1 modeli kullanılarak 10 boyutlu problem GAMS/SBB ile 3.18 saniyede eniyi çözüme ulaşılmıştır. M2 modeli ile her iki problem için de sonuç bulunamamıştır.

Tablo 1. Beş düğümlü GSP için GSA adımlarında elde edilen sonuçlar

	f(x)	c	norm	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
1	0.4	2.56	5.69	1	1	1	1	1
2	6.77	5.37	2.29	1	1.17	4.59	2.01	1.2
3	15.59	12.34	0.36	1	3.14	5	4.07	2.06
4	17.01	56.7	0.07	1	3.06	5	4.07	2.06
5	17.01	269.82	0.02	1	3.03	5	4.02	2.02
6	17	1200.02	0	1	3	5	4	2

6. Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada GSP için iki yeni model ve çözüm yaklaşımı önerilmiş olması, önemli bir yeniliktir. Ancak GSA'nın bu haliyle GSP'nin çözümünde, doğrusal yöntemlerle rekabet edebilecek durumda olmadığı açıktır. Yine de doğrusal olmayan modellerin çözüm tekniklerinde ve özellikle GSA'da olabilecek gelişmelere bağlı olarak, gelecekte daha olumlu sonuçlar elde edilebileceği düşünülmelidir.

Kaynaklar

Applegate D., Bixby R. Chavatal V., Cook W., http://www.math.princeton.edu/tsp, 2001.

Desrochers M., Laporte G., Improvements and extensions to the Miller-Tucker-Zemlin subtour elimination constraints, *Ops. Res. Letters*, 10, 27-36,1991.

Gasimov, R. N., Augmented Lagrangian duality and nondifferentiable optimization methods in nonconvex programming, *Journal of Global Optimization*, 24, 187-203, 2002.

Laporte G., The traveling salesman problem: An overview of exact and approximate algorithms, *EJOR*, 59, 231-247, 1992.

Miller C.E., Tucker A.W., Zemlin R.A., Integer programming formulation of traveling salesman problems, *Journal of Association for Computing Machinery*, 7, 326-329, 1960.

Rardin R., *Optimization in Operations Research*, Prentice Hal*l*, 920 p., 1998.

Sipahioğlu A., Gezgin satıcı ve araç turu belirleme problemleri için yeni alt tur engelleme kısıtları, Doktora Tezi, Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 99 s, 1996.

Li, H.L., An approximate method for local optima for nonlinear mixed integer programming problems, *Computers and Operations Research.* 19(5), 435-444, 1992.